

REGELMÄSSIGE
Schnitte und Projectionen

DES ACHTZELLES UND DES SECHSZEHNZELLES

IM

VIERDIMENSIONALEN RAUME.

VON

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. N^o. 2.

(MIT EINER TAFEL.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER
1894.

REGELMÄSSIGE SCHNITTE UND PROJECTIONEN

DES ACHTZELLES UND DES SECHSZEHNZELLES

IM VIERDIMENSIONALEN RAUME.

VON

P. H. S C H O U T E.



I. SCHNITTE VOM ACHTZELLE Z_a^8 .

1. Man erhält eine Abbildung von Z_a^8 auf den dreidimensionalen Raum, wenn man einen Würfel in zwei parallelen Lagen annimmt und die entsprechenden Eckpunkte verbindet. Hiervon liefert Fig. 1 eine zweidimensionale Andeutung.

Wir betrachten nun zunächst den Schnitt von Z_a^8 (Seitenlänge = a) mit dem dreidimensionalen Raume R_3 , welcher im Mittelpunkte O der Zelldiagonale AB auf dieser Geraden senkrecht steht und also den Ort des Punktes bildet, der von A und B gleich weit entfernt ist. Dieser R_3 muss die von Seiten weder mit A noch mit B verbundenen Ecken $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ aufnehmen, weil diese Punkte von A und B die gleiche Entfernung $a\sqrt{2}$ haben. Da diese Punkte von A die nämliche Entfernung $a\sqrt{2}$ haben, liegen sie auf dem Schnitte von R_3 mit der Hypersphere von Centrum und Radius A und $a\sqrt{2}$, d. h. auf der Kugel von Centrum und Radius O und a . Oder, was schneller zum Ziele führt, es ist $P_1 P_2 P_3$ ein gleichseitiges Dreieck, welches man erhält, wenn man vom Würfel mit der Körperdiagonale AC die andern Eckpunkte der in C zusammenstossenden Kanten verbindet. So findet man, dass die sechs genannten Punkte die Eckpunkte sind von acht gleichseitigen Dreiecken, welche in den vier Paaren von parallelen Ebenen liegen, die R_3 mit den vier Paaren von begrenzenden Würfeln gemein hat. Deshalb schliessen diese Dreiecke, wie die Figur auch deutlich erkennen lässt, ein regelmässiges Octaeder von der Seitenlänge $a\sqrt{2}$ ein. Also hat man:
„Der Schnitt des Z_a^8 mit dem Mittelraume senkrecht auf einer Zelldiagonale ist ein Octaeder $O_{a\sqrt{2}}$ “.

4 REGELMÄSSIGE SCHNITTE UND PROJECTIONEN DES ACHTZELLES

„Bei paralleler Verschiebung des Schnitttraumes R_3 geht das Octaeder in die Combination von zwei centriscen nicht gleich stark entwickelten entgegengesetzten Tetraedern (Fig. 2) über*)”.

Dieser Satz bildet die Ausdehnung des bekannten Satzes, welcher aussagt, wie ein Würfel von einer Ebene senkrecht zu einer Körperdiagonale geschnitten wird.

2. Wir betrachten weiter den Schnitt von Z_a^8 mit dem dreidimensionalen Raume R'_3 , welcher im Mittelpunkte O der ersten Querlinie $A'B'$ (Fig. 3) durch die Mitten von zwei gegenüberstehenden Seiten auf dieser Geraden senkrecht steht. Da die Körperdiagonalen A_1B_1 und A_2B_2 eines Paares von parallelen Würfeln mit $A'B'$ parallel laufen und auf A_1A_2 und B_1B_2 senkrecht stehen, werden sie ebenfalls vom Raume R'_3 senkrecht halbiert. Dem bekannten Satze des Würfelschnittes nach, begegnet R'_3 diese beiden Würfel in gleichen regelmässigen Sechsecken, die in parallelen Ebenen liegen. Weil A_1A_2 dem Schnitttraume R'_3 parallel ist, begegnet diese die sechs andern begrenzenden Würfel in gleichen Rechtecken (mit den Seitenlängen a und $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$). Und es leuchtet jedenfalls auch ein, dass die Mitten $P_1, P_2 \dots Q_6$ der zwölf Seiten, welche weder mit A_1A_2 und B_1B_2 parallel sind, noch diese Seiten schneiden, von A' und B die gleiche Entfernung $\frac{1}{2}a\sqrt{6}$ haben. Man hat also:

„Der Schnitt des Z_a^8 mit dem Mittelraume senkrecht auf einer ersten Querlinie ist ein regelmässiges sechsseitiges Prisma $P_1 a\sqrt{2}, a$ ”.

„Bei paralleler Verschiebung des Schnitttraumes geht $P_1 a\sqrt{2}, a$ in die Combination von zwei centriscen nicht gleich stark entwickelten regelmässigen dreiseitigen Prismen (Fig. 4) über†)”.

3. Es ist nicht notwendig die übrigen noch einfacheren Fälle näher zu erörtern. Deshalb geben wir nur die Resultate:

„Der Schnitt des Z_a^8 mit dem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie $A''B''$ (Fig. 5) ist ein rechtwinkliges Parallelopiped $P_{a,a,a\sqrt{2}}$ ”.

„Bei paralleler Verschiebung ändert sich die Dimension $a\sqrt{2}$ ”.

„Der Schnitt des Z_a^8 mit einem Raume parallel zu zwei begrenzenden Würfeln ist ein Würfel W_a ”.

4. Wir reihen hier einige Andeutungen über den Schnitt mit einem willkürlich gewählten Mittelraume an. Er ist immer von

*) Hier ist nur die *Form* und nicht die *Grösse* der Combination in Vergleichung mit der *Grösse* des Octaeders richtig angegeben. Denn bei paralleler Verschiebung des Schnitttraumes ändert sich der Abstand der parallelen Seitenflächen nicht.

†) Man sehe die erste Fussnote.

Paaren paralleler Ebenen eingeschlossen, hat O zum Centrum und ist in Bezug auf O radial-symmetrisch. Es sind also die gegenüberliegenden Seitenflächen einander entgegengesetzt-congruente Sech-, Fünf-, Vier- oder Dreiecke. Und bei paralleler Verschiebung verliert der Schnittkörper die centralen Eigenschaften, können sogar einige Seitenflächen verschwinden. Weiteres würde uns in die Tetragoniometrie führen.

II. PROJECTIONEN VOM ACHTZELL Z_a^8 .

5. Wir projicieren zunächst das Z_a^8 in der Richtung AB (Fig. 1) auf den oben benutzten Schnittraum R_3 . Dabei wird dann jedes der beiden Quadrupel von entweder in A oder in B zusammentretenden Würfeln die nämliche Projection liefern und die diesen Körper einschliessenden Seitenflächen von den weder durch A noch durch B gehenden zwölf Seitenflächen von Z_a^8 herrühren. Von jedem schiefen Paralleloipede, das die Projection eines der acht begrenzenden Würfel von Z_a^8 bildet, stossen dann drei Seitenflächen in O zusammen, indem die drei übrigen zur Begrenzung gehören. Da das Z_a^8 im ganzen sechszehn Eckpunkte hat und A und B sich im Centrum O projicieren, wird die Begrenzung vierzehn Eckpunkte zählen. Diese vierzehn Punkte sind verschiedener Art. Erstens giebt es sechs Punkte, die ihre eigene Projection sind, die Eckpunkte des Octaeders $O_{a\sqrt{2}}$. Zweitens rühren acht Punkte von den Ecken her, die entweder mit A oder mit B verbunden sind. Wir unterdrücken den einfachen Beweis, dass die Projectionen dieser acht Punkte die Eckpunkte eines Würfels W_a sind. Ist dieser Beweis gegeben, so findet man:

„Die senkrechte Projection des Z_a^8 in der Richtung einer Zelldiagonale ist ein Rhombendodekaeder $R_{a\sqrt{3}}$.“

Zeichnet man in der Abbildung des Rhombendodekaeders die vier Würfel diagonalen hinein (Fig. 6) und bringt man die von diesen Geraden zu je zweien bestimmten Ebenen an, so leuchtet es wirklich ein, dass dieser Körper auf zwei verschiedene Weisen die Summe von vier gleichen schiefen Paralleloipedern ist.

6. Die parallelen dreidimensionalen Räume, welche die Würfel A_1B_1 und A_2B_2 (Fig. 3) enthalten, stehen senkrecht auf den Strecken A_1A_2 und B_1B_2 , welche dem oben benutzten Mittelraume R'_3 parallel sind. Wenn wir das Z_a^8 in der Richtung $A'B'$ auf diesen Raum R'_3 projicieren, sind die Projectionen der beiden genannten Würfel also ebene Figuren; für jeden dieser beiden Würfel spielt die

6 REGELMÄSSIGE SCHNITTE UND PROJECTIONEN DES ACHTZELLES

Operation des Projiciers ganz in seinem eigenen Raume, d. h. auf die Schnittebene seines Raumes mit R'_3 ab. Da die beiden Schnittebenen die Körperdiagonalen A_1B_1 und A_2B_2 senkrecht halbieren, sind die beiden Projectionen, einem zweiten bekannten Satze vom Würfel nach, zwei gleiche regelmässige Sechsecke $S_{\frac{1}{2}a\sqrt{6}}$. Weiter projicieren sich die sechs übrigen Würfel als gleiche Parallelpipede mit einer gemeinschaftlichen Seite O_1O_2 . Deshalb findet man:

„Die senkrechte Projection des Z_a^8 in der Richtung einer ersten Querlinie ist ein regelmässiges sechseitiges Prisma $P_{\frac{1}{2}a\sqrt{6},a}$.“

7. Von den übrigen noch einfacheren Fällen geben wir nur die Resultate.

„Die senkrechte Projection des Z_a^8 in der Richtung einer zweiten Querlinie ist ein rechtwinkliges Parallelipiped $P_{a,a,a\sqrt{2}}$.“

„Die senkrechte Projection des Z_a^8 auf einen Raum, der mit zwei der acht begrenzenden Würfel parallel läuft, ist ein Würfel W_a .“

8. Die allgemeinste senkrechte Projection des Z_a^8 ist ein Körper mit höchstens sechs Paaren parallelen Seitenflächen und 16 Eckpunkten. Sie hat einen Mittelpunkt und ist in Bezug auf diesen radial-symmetrisch.

III. ANALYTISCHE ABLEITUNG DER GEWONNENEN RESULTATE.

9. Nimmt man die vier dreidimensionalen Räume durch O parallel zu den Paaren von begrenzenden Würfeln zu Koordinatenräumen an, so erhält man die einfachste Koordinatenstellung des Z_a^8 . Dabei sind die Coordinaten der 16 Eckpunkte durch die Gleichungen

$$2x_1 = \pm a, \quad 2x_2 = \pm a, \quad 2x_3 = \pm a, \quad 2x_4 = \pm a,$$

wo man alle Zeichencombinationen zu betrachten hat, gegeben. Mittels der orthogonalen Transformation

$$\left. \begin{aligned} 2y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2y_2 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ 2y_3 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 2y_4 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 1)$$

wird das Z_a^8 senkrecht auf seine Zelldiagonale gestellt. Mit der Abkürzung b für $-a$ findet man bei jeder Zeichencombination die Werte der doppelten Coordinaten $2y_1, 2y_2, 2y_3, 2y_4$ angegeben.

$++++$	$2a, 0, 0, 0$	$++--$	$0, 2a, 0, 0$	$---+$	b, b, b, a
		$+ - + -$	$0, 0, 2a, 0$	$---+$	b, b, a, b
$-+++$	b, a, a, a	$+ ---$	$0, 0, 0, 2a$	$--+-$	b, a, b, b
$+ - ++$	a, b, a, a	$- ++ -$	$0, 0, 0, 2b$	$+ ---$	a, b, b, b
$++-+$	a, a, b, a	$- + - +$	$0, 0, 2b, 0$		
$+++ -$	a, a, a, b	$---+$	$0, 2b, 0, 0$	$----$	$2b, 0, 0, 0$

In diesem Schema sind die sechs Punkte des mittleren Teiles die Schnittpunkte mit dem Raume $y_1 = 0$, die wir als die Ecke des Octaeders $O_{a\sqrt{2}}$ erkannt haben. Und indem der erste und der letzte Punkt sich auf $y_1 = 0$ in O projizieren, bilden die gleichartigen Projectionen der 8 Punkte, deren Coordinaten eine ungerade Zahl von Minuszeichen zeigen, die Ecke des Würfels W_a .

10. Es ist im Systeme der x der Punkt $x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{2}a$ der Mittelpunkt einer Seite (A' in Fig. 3) und deshalb ist auch $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ die Gleichung des Mittelraumes senkrecht auf OA' . Mittels der Transformation

$$\left. \begin{aligned} z_1\sqrt{3} &= x_2 + x_3 + x_4 \\ z_2\sqrt{3} &= -x_1 - x_3 + x_4 \\ z_3\sqrt{3} &= -x_1 + x_2 - x_4 \\ z_4\sqrt{3} &= -x_1 - x_2 + x_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 2$$

stellen wir Z_a^8 also senkrecht auf seine erste Querlinie. Mit der Abkürzung $c = -d = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ finden wir in nämlicher Reihenfolge das Coordinatenschema

$3c, d, d, d$	$d, d, c, 3d$	$d, 3c, d, c$
	$d, 3d, d, c$	$d, d, c, 3c$
$3c, c, c, c$	$d, c, 3d, d$	$d, c, 3c, d$
$c, d, 3d, c$	$c, d, 3c, c$	$3d, d, d, d$
$c, c, d, 3d$	$c, 3c, c, d$	
$c, 3d, c, d$	$c, c, d, 3c$	$3d, c, c, c$

Dieses Schema zeigt, dass die Projection auf $z_1 = 0$ ausser den doppelt zählenden Punkten (c, c, c) und (d, d, d) die zwölf Punkte

8 REGELMÄSSIGE SCHNITTE UND PROJECTIONEN DES ACHTZELLES

$3c, c, d$	$c, 3c, d$	$c, d, 3c$
$3c, d, c$	$d, 3c, c$	$d, c, 3c$
$3d, c, d$	$c, 3d, d$	$c, d, 3d$
$3d, d, c$	$d, 3d, c$	$d, c, 3d$

enthält. Mit den Punkten

$3c, c, c$	$c, 3c, c$	$c, c, 3c$
$3c, d, d$	$d, 3c, d$	$d, d, 3c$
$3d, c, c$	$c, 3d, c$	$c, c, 3d$
$3d, d, d$	$d, 3d, d$	$d, d, 3d$

bilden sie die 24 convexen Ecken des von sieben Würfeln gebildeten Kreuzes mit drei Armen (Fig. 7). An und für sich bilden sie die Eckpunkte eines regelmässigen sechsseitigen Prismas.

Zur Untersuchung des Schnittes mit dem Raume $z_1 = 0$, bedienen wir uns von den Umkehrungen der Formeln 2). Diese zeigen, dass die acht begrenzenden Räume den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} z_2 + z_3 + z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ -z_1 - z_3 + z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ -z_1 + z_2 - z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ -z_1 - z_2 + z_3 &= \pm a\sqrt{3} \end{aligned} \right\}$$

entsprechen und diese also mit dem Raume $z_1 = 0$ die Ebenen

$$\left. \begin{aligned} z_2 + z_3 + z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ -z_3 + z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ z_2 - z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ -z_2 + z_3 &= \pm a\sqrt{3} \end{aligned} \right\}$$

gemein haben. Wie eine Zeichnung (Fig. 8) andeutet, bildet das erste Paar Ebenen die Grundebenen eines regelmässigen sechsseitigen Prismas, von welchem die drei andern Paare die Seitenflächen ausmachen.

11. Es ist im Systeme der x der Punkt $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}a, x_3 = x_4 = 0$ der Mittelpunkt einer Seitenfläche (A'' in Fig. 5) und deshalb $x_1 + x_2 = 0$ die Gleichung des Mittelraumes senkrecht auf $A''B''$.

Daher bedienen wir uns der Transformation

$$\left. \begin{array}{l} t_1\sqrt{2} = x_1 + x_2 \\ t_2\sqrt{2} = x_1 - x_2 \\ t_3\sqrt{2} = x_3 + x_4 \\ t_4\sqrt{2} = x_3 - x_4 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x_1\sqrt{2} = t_1 + t_2 \\ x_2\sqrt{2} = t_1 - t_2 \\ x_3\sqrt{2} = t_3 + t_4 \\ x_4\sqrt{2} = t_3 - t_4 \end{array} \right\} \dots 3)$$

und erhalten dann die 16 Punkte und 8 Räume (für $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$ als Coordinateneinheit) in der Form

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1, & 0, & 1, & 0 & 1, & 0, & -1, & 0 & -1, & 0 & -1, & 0, & 0, & -1 \\ & & & & 0, & 1, & 0, & 1 & -1, & 0, & 0, & 1 & t_1 + t_2 = \pm 1 \\ 0, & -1, & 1, & 0 & 0, & 1, & 0, & -1 & 0, & -1, & -1, & 0 & t_1 - t_2 = \pm 1 \\ 0, & 1, & 1, & 0 & 0, & -1, & 0, & 1 & 0, & 1, & -1, & 0 & t_3 + t_4 = \pm 1 \\ 1, & 0, & 0, & -1 & 0, & -1, & 0, & -1 & & & & & t_3 - t_4 = \pm 1 \\ 1, & 0, & 0, & 1 & -1, & 0, & 1, & 0 & -1, & 0, & -1, & 0 \end{array} \parallel$$

Es werden deshalb Projection auf $t_1 = 0$ und Schnitt mit $t_1 = 0$ in vollem Einklange mit den errungenen Ergebnissen von Fig. 9 angegeben.

12. Anstatt der Formeln 2) und 3) hätten wir auch die Formeln

$$\left. \begin{array}{l} 3z_1 = x_2\sqrt{3} + x_3\sqrt{3} + x_4\sqrt{3} \\ 3z_2 = x_1\sqrt{3} - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ 3z_3 = x_1\sqrt{3} + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ 3z_4 = x_1\sqrt{3} + x_2 + x_3 - 2x_4 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} t_1\sqrt{2} = x_1 + x_2 \\ t_2\sqrt{2} = x_1 - x_2 \\ t_3 = x_3 \\ t_4 = x_4 \end{array} \right\}$$

anwenden können. Wir haben aber die gewählten Formeln vorgezogen, weil aus ihnen einige neue Wahrheiten abzuleiten sind.

Aus der Transformation 1) geht hervor, dass die 8 Zelldiagonalen des Z_a^8 sich auf nur eine Art in zwei Systeme von vier senkrechten Coordinatenachsen zerlegen lassen. Denn es sind die neuen Achsen die Diagonale AB (Fig. 1) und die drei Körperdiagonalen des $O_{a\sqrt{2}}$ und wenn AB gewählt ist, ist der Schnitt $O_{a\sqrt{2}}$ bestimmt.

Auf die nämliche Art liegt der Transformation 2) ein System von vier zu je zweien zu einander senkrechten ersten Querlinien OA' (Fig. 3) zu Grunde. Ist nun OA' gewählt, so kann man entweder die drei Diagonalen OP_1, OP_3, OP_5 oder die drei Diagona-

10 REGELMÄSSIGE SCHNITTE UND PROJECTIONEN DES ACHTZELLES

len OP_2 , OP_4 , OP_6 als andere Achsen annehmen. Es bilden also die 16 ersten Querlinien $\frac{16 \times 2}{4}$ d. h. 8 Systeme von vier senkrechten Koordinatenachsen.

So fortfahrend findet man, dass die neuen Koordinatenachsen der Transformation 3) vier zweite Querlinien sind. Zu $A''B''$ (Fig. 5) gesellt sich die Verbindungslinie $C''D''$ der Mittelpunkte der Seitenflächen des Schnittes, welche auch Seitenflächen des Z_a^8 sind, und das Paar von Verbindungslinien der Mitten $Q_1 Q_2$, $Q_3 Q_4$. Es bilden also die 12 zweiten Querlinien $\frac{12}{4}$, d. h. 3 Systeme von vier senkrechten Koordinatenachsen.

Dem Satze über die 8 Zelldiagonalen des Z_a^8 entsprechend findet man im Raume von 2^n Dimensionen, dass die 2^{2n-1} Diagonalen des Wesens mit 2^{2n} Eckpunkten 2^{n-1} Systeme von 2^n zu je zweien zu einander senkrechten Koordinatenachsen bilden. So kann im Raume R_3 ein System von Formeln, den Gleichungen 1) analog, gefunden werden, wobei folgende Zeichengruppierung vorkommt:

+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	-	-	-	-
+	+	-	-	+	+	-	-
+	-	+	-	+	-	+	-
+	+	-	-	-	-	+	+
+	-	+	-	-	+	-	+
+	-	-	+	-	+	+	-
+	-	-	+	+	-	-	+

IV. RECIPROCITÄT VON ACHTZELL UND SECHSZEHNZELL.

13. Die Polarfigur des Z_a^8 in Bezug auf die concentrische Hypersphäre $H_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ ist ein concentrisches Sechszehnzell Z_a^{16} mit der Seitenlänge a . Dabei bilden die Eckpunkte, Kanten, Seitenflächen und begrenzenden Körper des einen Zelles die Polarfiguren der begrenzenden Körper, Seitenflächen, Kanten und Eckpunkte des anderen Zelles. Ist R_3 irgend ein dreidimensionaler Raum und P sein Pol, so sind die Schnitte von R_3 mit den Kanten, Seitenflächen und begrenzenden Körpern des einen Zelles offen.

bar die Polarbildungen der linearen dreidimensionalen Räume, Ebenen und Geraden, welche durch Verbindung von P mit den Seitenflächen, Kanten und Eckpunkten des anderen Zelles entstehen. In Bezug auf die Kugel, welche den Schnitt von $H_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ und R_3 bildet, sind deshalb die Schnitte von R_3 mit den Kanten, Seitenflächen und begrenzenden Körpern des einen Zelles die Polarfiguren der aus dem Centrum P auf R_3 geworfenen centralen Projectionen von den Seitenflächen, Kanten und Eckpunkten des anderen Zelles. Ist R_3 ein durch den Mittelpunkt O von $H_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ gehender Raum und also P unendlich entfernt, so hat man es mit den senkrechten Projectionen zu thun.

Es können also die Schnitte und Projectionen von Z_a^{16} aus den Projectionen und Schnitten von Z_a^8 abgeleitet werden.

V. SCHNITTE UND PROJECTIONEN VON Z_a^{16} .

14. In gedrängter Kürze geben wir hier die in der oben angedeuteten Weise zu erhaltenden Resultate:

„Die senkrechte Projection des Z_a^{16} in der Richtung einer Zelldiagonale ist ein Octaeder O_a (§ 3, zweiter Satz).“

„Die senkrechte Projection des Z_a^{16} in der Richtung einer ersten Querlinie ist eine regelmässige vierseitige Doppelpyramide mit a als Seite des Quadrates und $\frac{1}{2}a$ als halbe Höhe (§ 3, erster Satz).“

„Die senkrechte Projection des Z_a^{16} in der Richtung einer zweiten Querlinie ist eine regelmässige sechsseitige Doppelpyramide mit $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$ als Seite des Sechsecks und $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ als halbe Höhe (§ 2).“

„Die senkrechte Projection des Z_a^{16} in der Richtung einer Verbindungslinie der Mittelpunkte von zwei einander gegenüberstehenden begrenzenden Tetraedern ist ein Würfel $W_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ (§ 1).“

15. „Der Schnitt des Z_a^{16} mit einem Mittelraume senkrecht auf einer Zelldiagonale ist ein O_a (§ 7, zweiter Satz). Bei paralleler Verschiebung des Mittelraumes ändert sich die Dimension des Octaeders“.

„Der Schnitt des Z_a^{16} mit einem Mittelraume senkrecht auf einer ersten Querlinie $A'B'$ ist eine regelmässige vierseitige Doppelpyramide (Fig. 10) mit a als Seite des Quadrates und $\frac{1}{2}a$ als halbe Höhe (§ 7, erster Satz). Achse der Doppelpyramide ist die zweite Querlinie Q_1Q_2 , welche mit den Kanten deren Mitten A' und B' sind in einer Ebene liegen. Bei paralleler Verschiebung des Schnitttraumes werden die Basisecken P_1, P_2, P_3, P_4 der Doppelpyramide (Fig. 11) von Ebenen senkrecht auf den Diagonalen des Quadrates abgestumpft“.

„Der Schnitt des Z_a^{16} mit einem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie $A''B''$ ist eine regelmässige sechseitige Doppelpyramide (Fig. 12) mit $\frac{1}{2}a$ als Seite des Sechsecks und $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ als halbe Höhe (§ 6). Achse der Doppelpyramide ist jene Achse $Q_1 Q_2$ des Z_a^{16} , welche mit dem Dreiecke RST , wovon A'' der Mittelpunkt ist keinen Punkt gemein hat. Bei paralleler Verschiebung des Schnitt- raumes löst sich die sechseitige Doppelpyramide in zwei regelmäs- sige dreiseitige Doppelpyramiden (Fig. 13) auf, von welchen die untergeordnete die Basisecken der vorherrschenden zweiflächig zu- schärft”.

„Der Schnitt des Z_a^{16} mit einem Mittelraume senkrecht auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte von zwei einander gegenüberste- henden begrenzenden Tetraedern ist eine Combination (Fig. 14) vom Octaeder $O_{a\sqrt{2}}$ mit dem Würfel $W_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ in Gleichgewicht (§ 5). Bei paralleler Verschiebung des Schnitt- raumes behalten die Würfel- ebenen ihre gegenseitige Lage und zerfällt (Fig. 15) das Octaeder in zwei ungleich stark entwickelte Tetraeder. Dabei bleibt der Schnittpunkt T der Seitenflächen RST und TUV (Fig. 14 und Fig. 15) auf der Würfelkante; deshalb wird der Körper begrenzt von vier grossen und vier kleinen gleichseitigen Dreiecken und sechs Rechtecken bis an die Grenze nur ein regelmässiges Tetraeder übrig bleibt”.

Offenbar erhält man das hier nicht benutzte Schema der Coordi- naten der Eckpunkte des Z_a^{16} in Bezug auf die vier Zelldiagonalen als Achsen, indem man auf alle mögliche Weisen drei der vier Coordinaten verschwinden lässt und der vierten den absoluten Wert $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ erteilt.

In einer folgenden Mitteilung werde ich die Untersuchung au- das Vierundzwanzigzell ausdehnen. Dabei wird dann die Zerlegung der 8 Zelldiagonalen des Z_a^8 in zwei Systeme von vier senkrechten Coordinatenachsen in ein neues Licht erscheinen.

N.B. Ein Teil der mitgetheilten Ergebnisse ist auch von Herrn T PROCTOR HALL im Aprilhefte vom „*American Journal of Mathe- matics*” dieses Jahres veröffentlicht in der Abhandlung „*The Pro- jection of Fourfold Figures upon a Three-Flat*”. Die Behandlungs- weise wird jedoch genügend zeigen, dass ich nicht von dieser Arbeit beeinflusst worden bin.

Groningen, September 1893.

ERKLÄRUNG DER TAFEL.

- Fig. 1. Das Achtzell (blau) wird vom Mittelraume senkrecht auf der Zelldiagonale AB in das Octaeder $P_1 P_2 \dots P_6$ (rot) geschnitten.
- » 2. Bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes löst sich das Octaeder $P_1 P_2 \dots P_6$ (rot) in zwei ungleich stark entwickelte Tetraeder (blau) auf.
 - » 3. Das Achtzell (blau) wird vom Mittelraume senkrecht auf der ersten Querlinie $A'B'$ in ein regelmässiges sechsseitiges Prisma (rot) geschnitten.
 - » 4. Bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes löst sich das sechsseitige Prisma (rot) in zwei ungleich stark entwickelte regelmässige dreiseitige Prismen (blau) auf.
 - » 5. Das Achtzell (blau) wird vom Mittelraume senkrecht auf der zweiten Querlinie $A''B''$ in ein regelmässiges vierseitiges Prisma (rot) geschnitten.
 - » 6. Auflösung des Rhombendodekaeders (schwarz), seinen Eckpunkten nach, in Würfel (rot) und Octaeder (blau).
 - » 7. Die zwölf benummerten Eckpunkte des Kreuzes mit drei Armen (rot), welches aus sieben gleichen Würfeln besteht, bilden die Eckpunkte eines regelmässigen sechsseitigen Prismas (blau).
 - » 8. Stellung des regelmässigen sechsseitigen Prismas (blau) von Fig. 3 in Bezug auf drei erste Querlinien OZ_2, OZ_3, OZ_4 , welche ein rechtwinkliges Achsenkreuz bilden. Die Grundebenen sind Ausbreitungen von zwei Seitenflächen des den Achsen OZ entsprechenden Octaeders (rot).

Fig. 9. Schnitt des Achtzelles mit einem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie und senkrechte Projection des Achtzelles auf diesen Raum.

- » 10. Das Sechszehnzell (blau) wird vom Mittelraume senkrecht auf der ersten Querlinie $A'B'$ in eine regelmässige vierseitige Doppelpyramide (rot) mit der Achse $Q_1 Q_2$ geschnitten.
 - » 11. Bei paralleler Verschiebung des Schnitttraumes werden die Basisecken der Doppelpyramide (blau) von Ebenen senkrecht auf den Diagonalen des Quadrates (rot) abgestumpft.
 - » 12. Das Sechszehnzell (blau) wird vom Mittelraume senkrecht auf der zweiten Querlinie $A''B''$ in eine regelmässige sechsseitige Doppelpyramide (rot) mit der Achse $Q_1 Q_2$ geschnitten.
 - » 13. Bei paralleler Verschiebung des Schnitttraumes löst sich die sechsseitige Doppelpyramide (rot) in zwei ungleich stark entwickelte regelmässige dreiseitige Doppelpyramiden (blau) auf.
 - » 14. Die Combination (blau) des Würfels (rot) und des Octaeders in Gleichgewicht, welche den Schnitt des Sechszehnzelles mit einem zu zweien der begrenzenden Räume parallelen Mittelraume bildet.
 - » 15. Umbildung der Combination von Fig. 14 bei paralleler Verschiebung des Schnitttraumes.
-

