

Skovtårnet i Camp Adventure ved Rønnede (Gisselfeld Kloster) - en cirkulær hyperboloide

restart

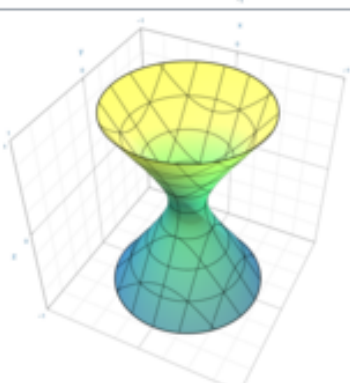
with(plots) :

with(plottools) :

Ligning og parametrisering

Ligning og beregning af halvakser

https://en.wikipedia.org/wiki/Quadric#Euclidean_space

Circular hyperboloid of one sheet (special case of elliptic hyperboloid of one sheet)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$	
---	---	--

<https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid>

Her antages, at $a = b$ (cirkulær hyperboloide), så forskriften er

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Facts:

Tårnet er 45 m højt.

Hyperboloiden er 28 m foroven og forneden i diameter, og 14 m i diameter i midten (smalleste sted).

Rampen er 1.8 m bred (er dog bredere ved foden).

Bestemmelse af a og c i ligningen:

Ser på snittet i xz -planen, dvs. $y = 0$. Ligningen er så $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Har 2 punkter, som hyperblen skal gå gennem, nemlig $(7, 0)$ og $(14, \frac{45}{2})$.

Beregner herudfra a og c :

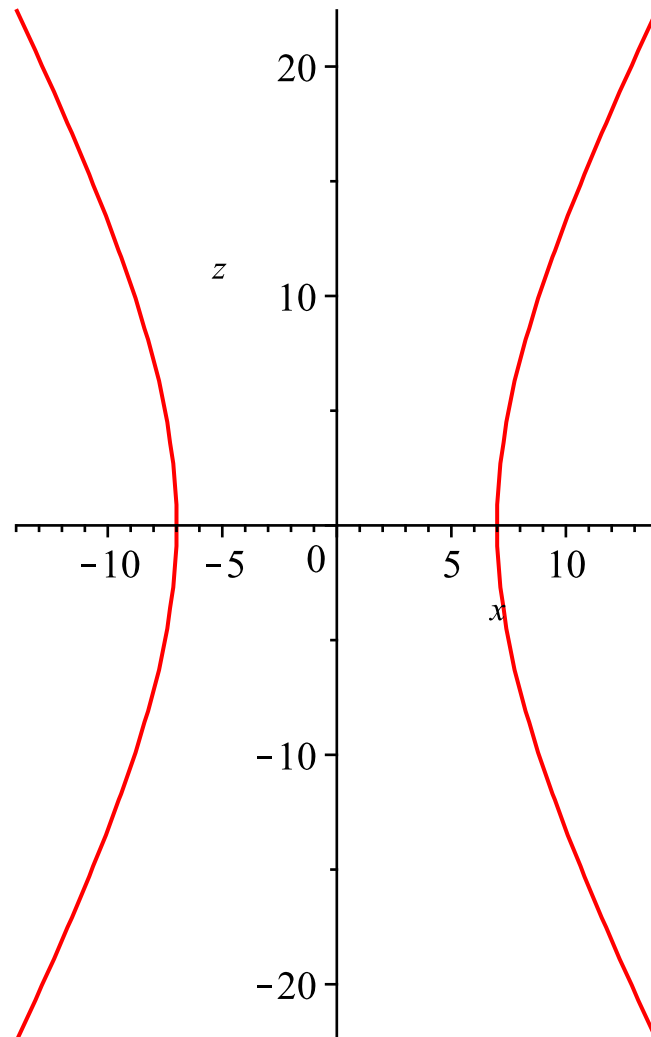
$$\text{solve}\left(\left\{\frac{7^2}{a^2} - \frac{0^2}{c^2} = 1, \frac{14^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{45}{2}\right)^2}{c^2} = 1, a > 0, c > 0\right\}\right) = \left\{a = 7, c = \frac{15\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Dvs.

$$a := 7 : c := \frac{15}{2} \cdot \sqrt{3} :$$

Hyperblen i xz -planen tegnes:

$$\text{implicitplot}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = -14 \dots 14, z = -\frac{45}{2} \dots \frac{45}{2}, \text{color} = \text{red}, \text{scaling} = \text{constrained}\right)$$



▼ Parametrisering af den ydre hyperboloide

▼ Parametrisering af overfladen

https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid#Parametric_representations

One-surface hyperboloid: $v \in (-\infty, \infty)$

$$x = a \cosh v \cos \theta$$

$$y = b \cosh v \sin \theta$$

$$z = c \sinh v$$

Idet $a = b$ får man følgende parametrisering af overfladen:

$$r(v, \theta) := \langle a \cdot \cosh(v) \cdot \cos(\theta), a \cdot \cosh(v) \cdot \sin(\theta), c \cdot \sinh(v) \rangle :$$

$$r(v, \theta) = \begin{bmatrix} 7 \cosh(v) \cos(\theta) \\ 7 \cosh(v) \sin(\theta) \\ \frac{15\sqrt{3} \sinh(v)}{2} \end{bmatrix}$$

Med parameterområderne $v \in [-v_{\max}, v_{\max}]$ og $\theta \in [0; 2 \cdot \pi]$.

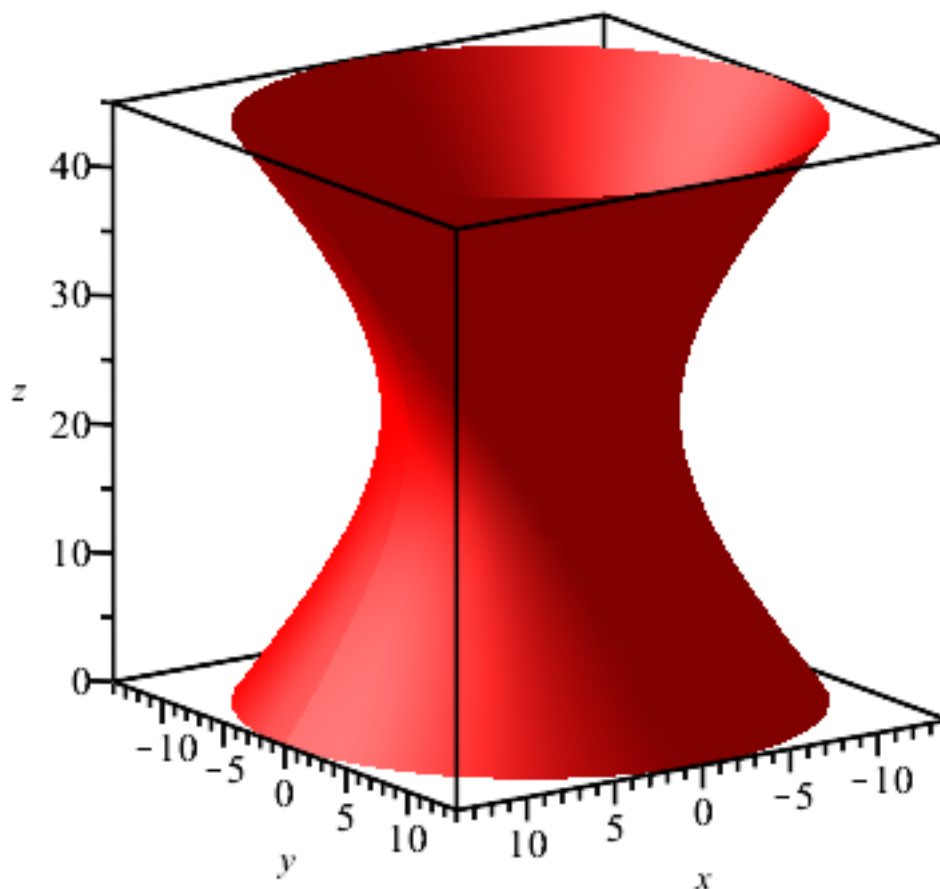
$v_{\max}$ beregnes:

$$v_{\max} := \text{solve}\left(c \cdot \sinh(v_{\max}) = \frac{45}{2}\right) = \text{arcsinh}(\sqrt{3})$$

$$\text{evalf}(v_{\max}) = 1.316957897$$

Hyperboloiden tegnes og løftes halvt op, så den går fra 0 til 45 i z (frem for fra $-\frac{45}{2}$ til $\frac{45}{2}$):

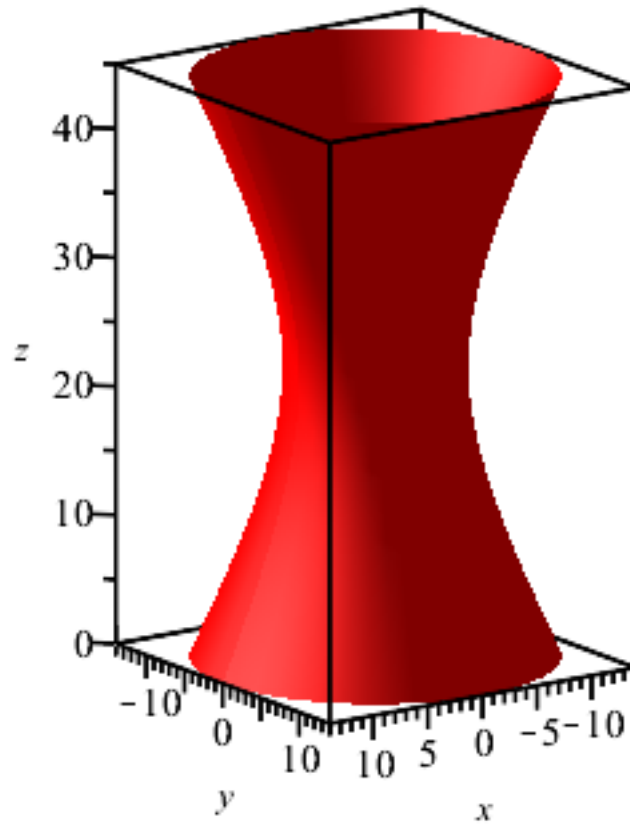
$$\text{plot3d}\left(r(v, \theta) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, v = -v_{\max} .. v_{\max}, \theta = 0 .. 2 \cdot \pi, color = red, style = patchnogrid, \right. \\ \left. labels = [x, y, z] \right)$$



Skalatro figur:

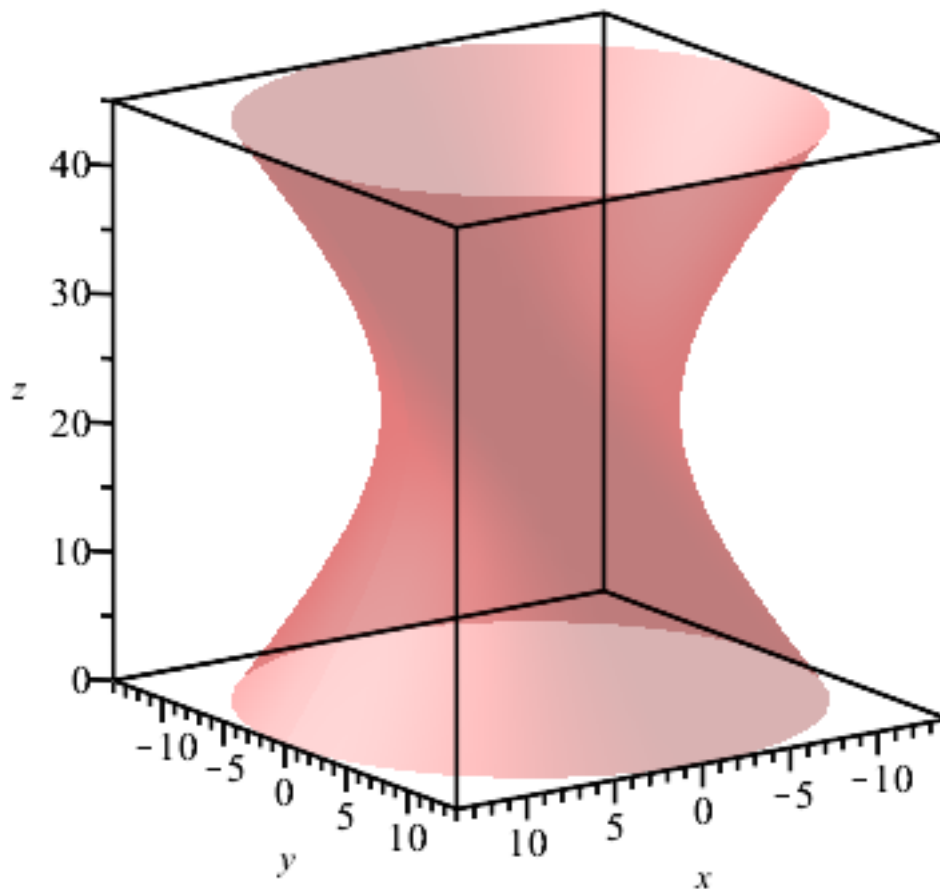
$$\text{plot3d}\left(r(v, \theta) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, v = -v_{\max} .. v_{\max}, \theta = 0 .. 2 \cdot \pi, color = red, style = patchnogrid, \right.$$

$labels = [x, y, z], scaling = constrained)$



Transparent figur:

$H := plot3d\left(r(v, \theta) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, v = -v_{\max}..v_{\max}, \theta = 0..2 \cdot \pi, color = red, transparency = 0.7, style = patchnogrid, labels = [x, y, z]\right)$



Parametrisering af rette linjer på overfladen (stålbjælkerne)

https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid#Properties_of_a_hyperboloid_of_one_sheet

If the hyperboloid has the equation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ then the lines

$$g_{\alpha}^{\pm} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ b \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -a \sin \alpha \\ b \cos \alpha \\ \pm c \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

are contained in the surface.

Højre om

$$lh(t, \alpha) := \langle a \cdot \cos(\alpha), a \cdot \sin(\alpha), 0 \rangle + t \cdot \langle -a \cdot \sin(\alpha), a \cdot \cos(\alpha), c \rangle :$$

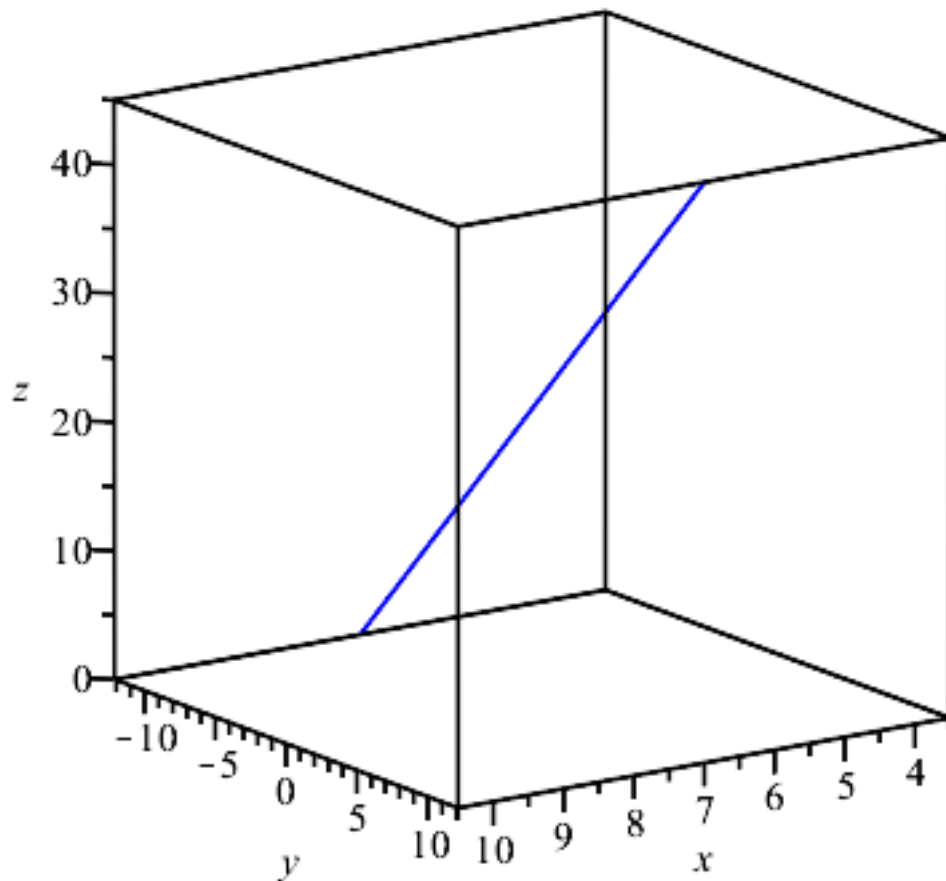
$$lh(t, \alpha) =$$

$$\begin{bmatrix} 7 \cos(\alpha) - 7 t \sin(\alpha) \\ 7 \sin(\alpha) + 7 t \cos(\alpha) \\ \frac{15 t \sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Beregning af parameterområdet for t :

$$t_{\max} := \text{solve}\left(lh(t, \alpha)[3] = \frac{45}{2}, t\right) = \sqrt{3}$$

$$\text{spacecurve}\left(lh(t, 0) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, t = -t_{\max} .. t_{\max}, \text{color} = \text{blue}, \text{style} = \text{patchnogrid}, \text{labels} = [x, y, z]\right)$$



18 linjer ønskes:

$N := 18$:

NB: Parameteren t skal følge figuren ovenfor. Derfor skal

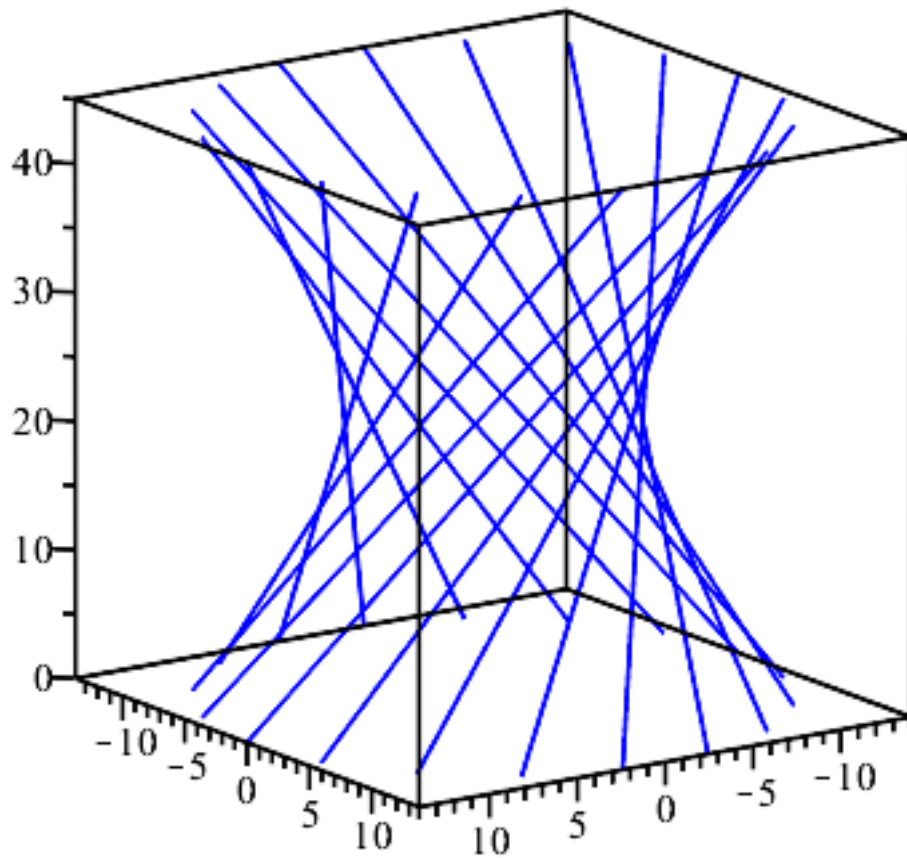
$$t \in [-c \cdot \sinh(v_{\max}), c \cdot \sinh(v_{\max})]$$

for n from 0 to $N - 1$ do

$$Lh[n] := \text{spacecurve}\left(lh\left(t, \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot n\right) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, t = -t_{\max} .. t_{\max}, \text{color} = \text{blue}\right) :$$

end do:

$LINh := display(seq(Lh[n], n = 0 .. N - 1))$

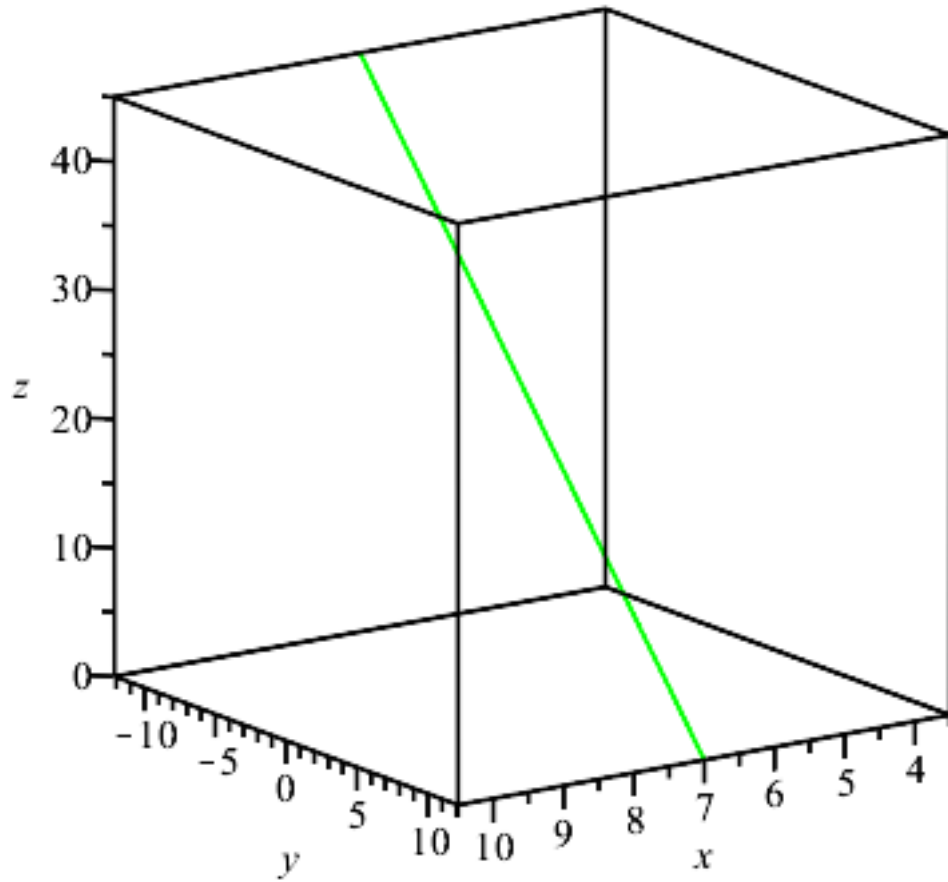


▼ **Venstre om**

$$lv(t, \alpha) := \langle a \cdot \cos(\alpha), a \cdot \sin(\alpha), 0 \rangle + t \cdot \langle -a \cdot \sin(\alpha), a \cdot \cos(\alpha), -c \rangle :$$

$$lv(t, \alpha) = \begin{bmatrix} 7 \cos(\alpha) - 7 t \sin(\alpha) \\ 7 \sin(\alpha) + 7 t \cos(\alpha) \\ -\frac{15 t \sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$spacecurve\left(lv(t, 0) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, t = -t_{\max} .. t_{\max}, color = green, style = patchnogrid, labels = [x, y, z]\right)$$

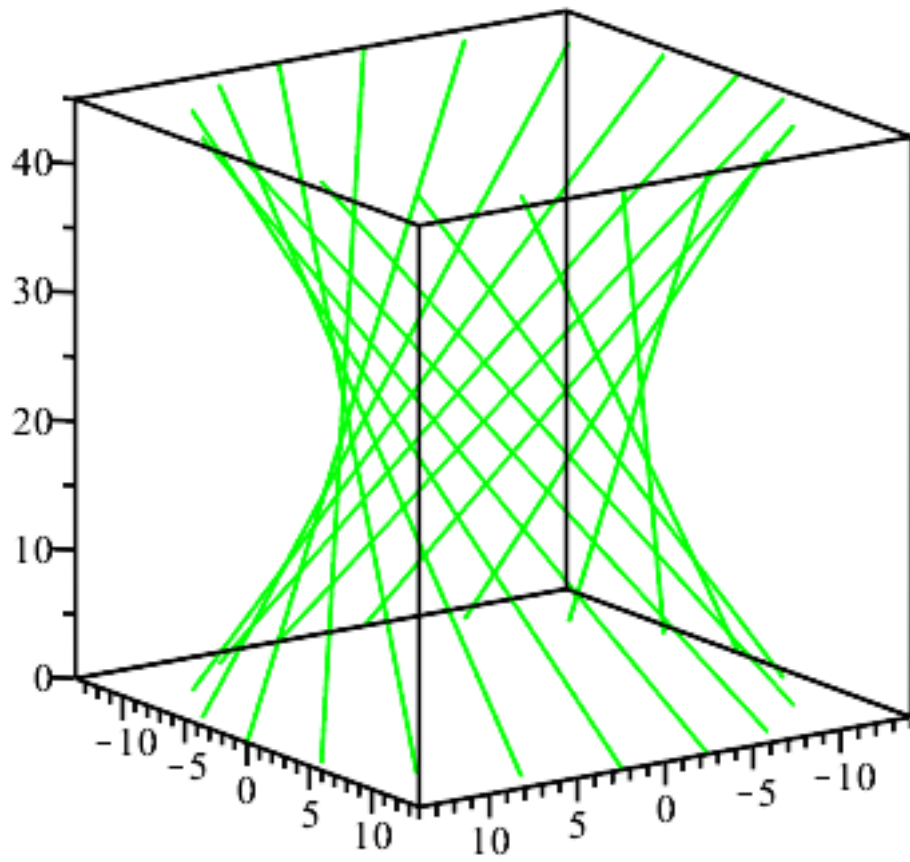


for n **from** 0 **to** $N - 1$ **do**

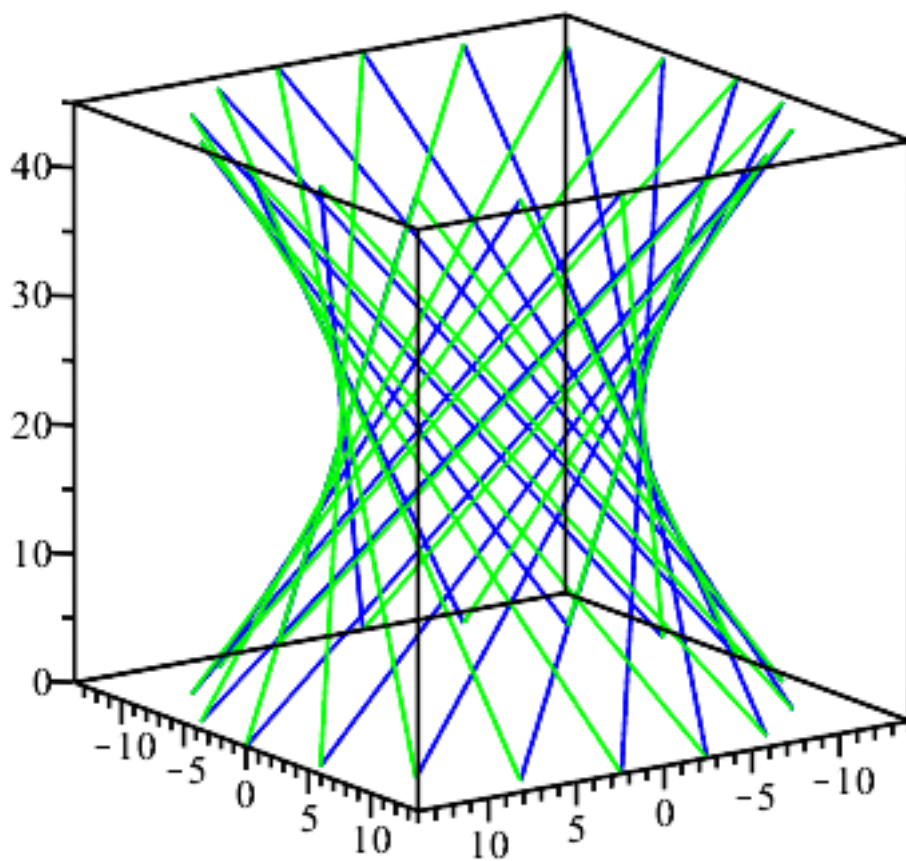
$Lv[n] := \text{spacecurve}\left(lv\left(t, \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot n\right) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, t = -t_{\max} .. t_{\max}, \text{color} = \text{green}\right) :$

end do:

$LINv := \text{display}(\text{seq}(Lv[n], n = 0 .. N - 1))$

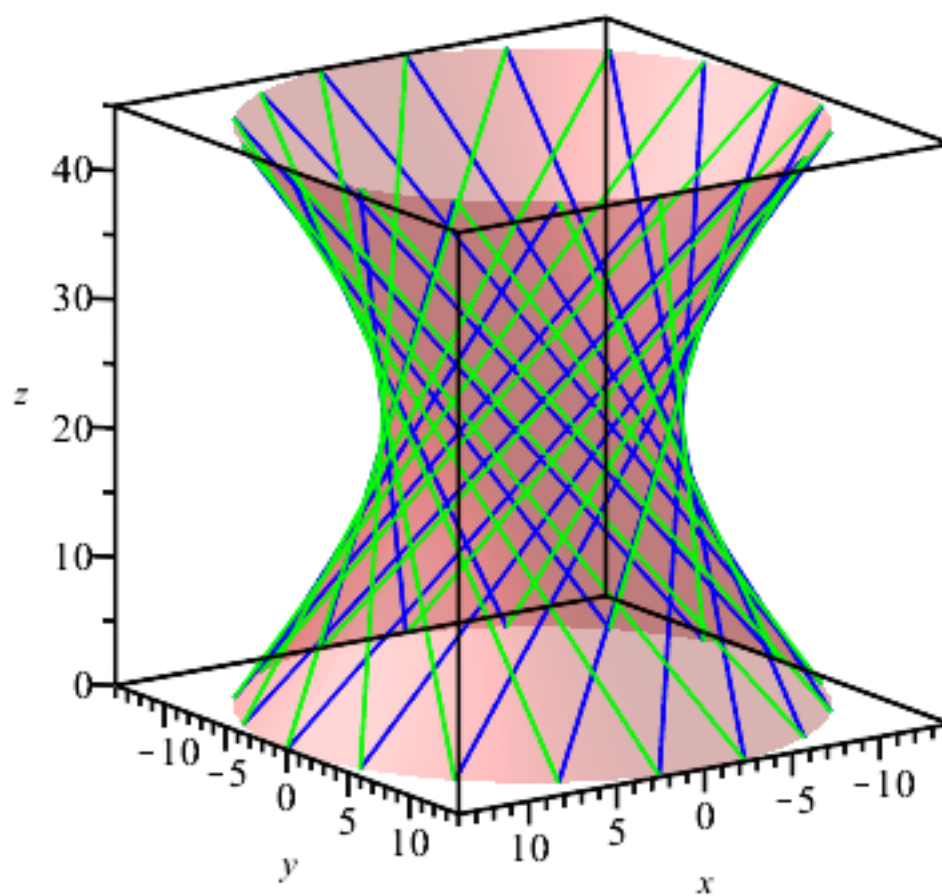


Venstre hhv. højre om
display(LINh, LINv)



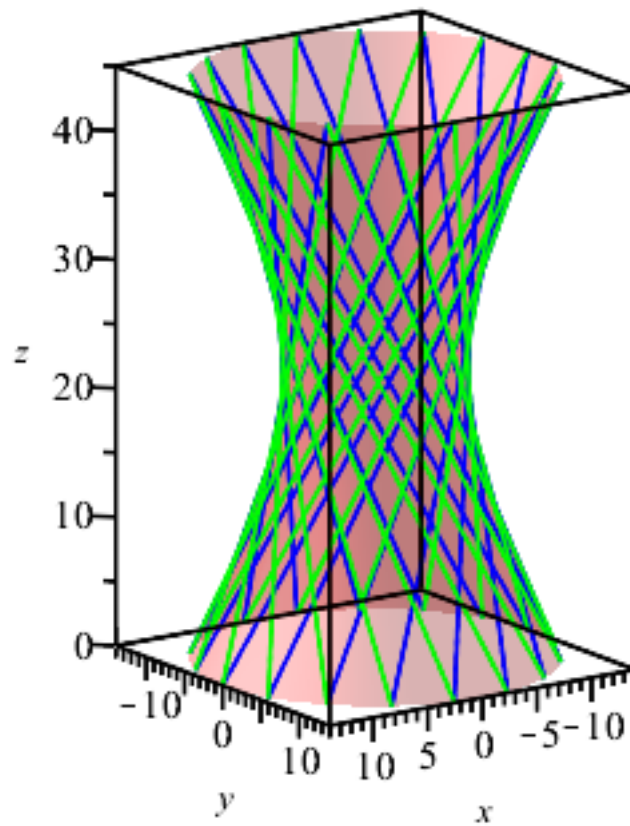
▼ ***Samlet visning af den cirkulære hyperboloide med rette linjer på overfladen***

ydre := *display*(*H*, *LINh*, *LINv*)



Skalatro figur:

display(H, LINh, LINv, scaling = constrained)



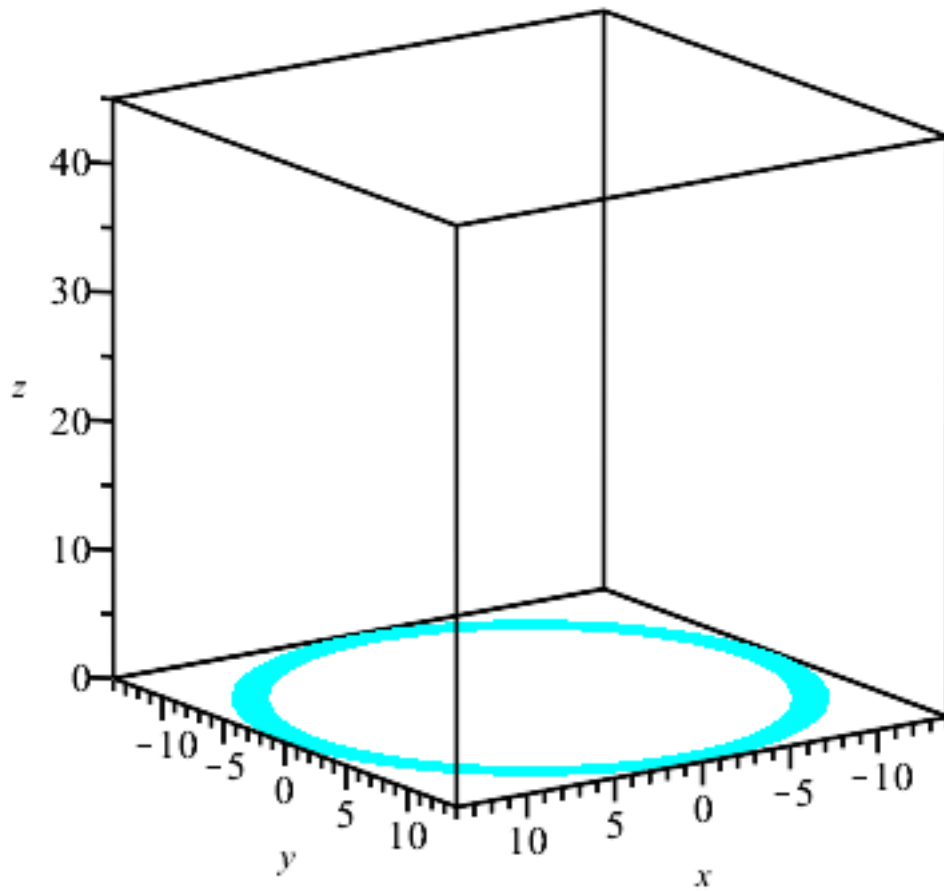
▼ Roterende rampe (12 omdrejninger)

▼ 1 omgang

$$vej(p, q) := \langle q \cdot \cos(p), q \cdot \sin(p), 0 \rangle :$$

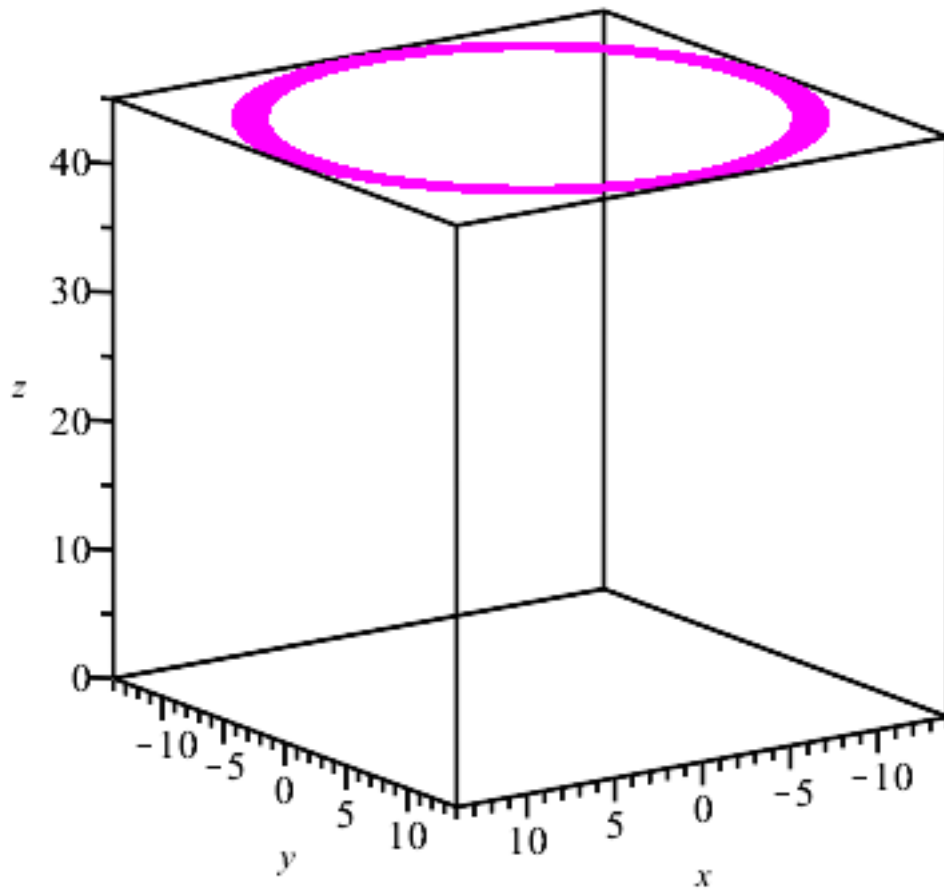
Parameterområdet $p \in [0; 2 \cdot \pi]$ og $q \in [14 - 1.8; 14]$

`plot3d(vej(p, q), p=0..2·π, q=14-1.8..14, color=cyan, style=patchnogrid, labels=[x, y, z], view=[-14..14, -14..14, 0..45])`



Platformen i toppen:

```
ring := plot3d(vej(p, q) + <0, 0, 45>, p = 0 .. 2 * pi, q = 14 - 1.8 .. 14, color = magenta, style
= patchnogrid, labels = [x, y, z], view = [-14 .. 14, -14 .. 14, 0 .. 45])
```



▼ **Rampe (12 omgange)**

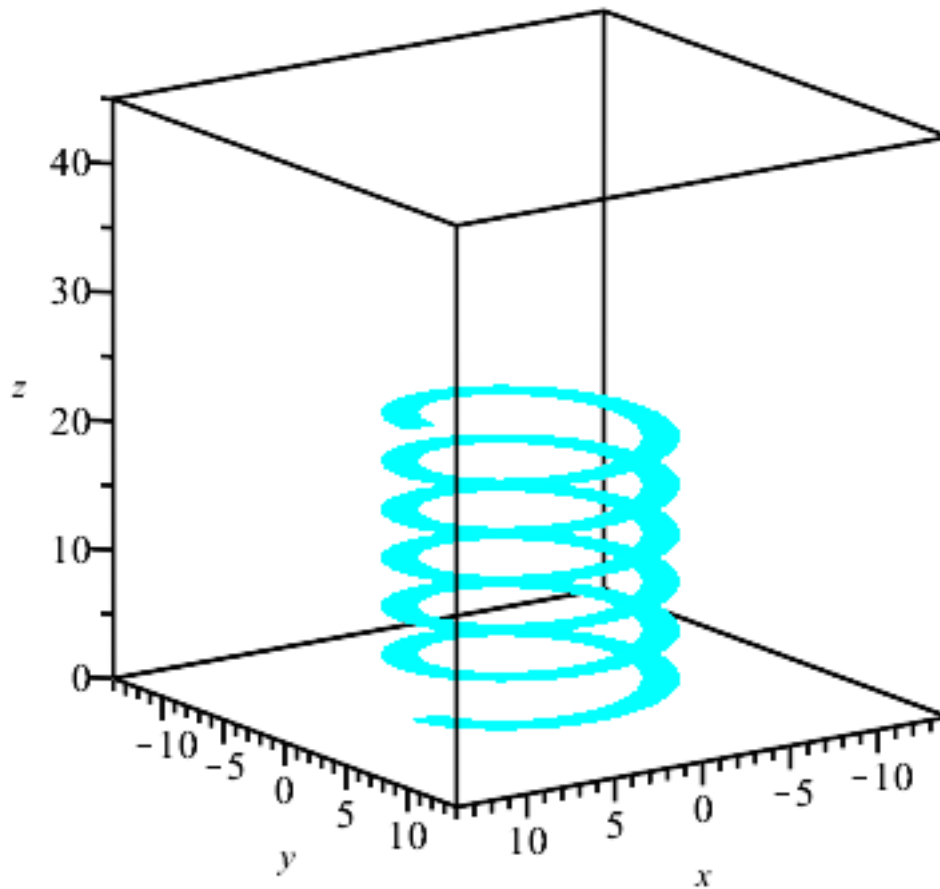
$R := 12 :$

6 omgange fra bunden til midten LIGE op:

z skal vokse lineært op til $\frac{45}{2}$, dvs. $z = \frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot p$, idet p vokser fra 0 til $2 \cdot \pi$.

$$vej_{snoet}(p, q) := \left\langle q \cdot \cos\left(\frac{R}{2} \cdot p\right), q \cdot \sin\left(\frac{R}{2} \cdot p\right), \frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot p \right\rangle :$$

$plot3d(vej_{snoet}(p, q), p=0..2 \cdot \pi, q=7-1.8..7, color=cyan, style=patchnogrid, labels=[x, y, z], view=[-14..14, -14..14, 0..45], numpoints=100000)$



I følge parametriseringen gælder

$$r(v, \theta) := \langle a \cdot \cosh(v) \cdot \cos(\theta), a \cdot \cosh(v) \cdot \sin(\theta), c \cdot \sinh(v) \rangle$$

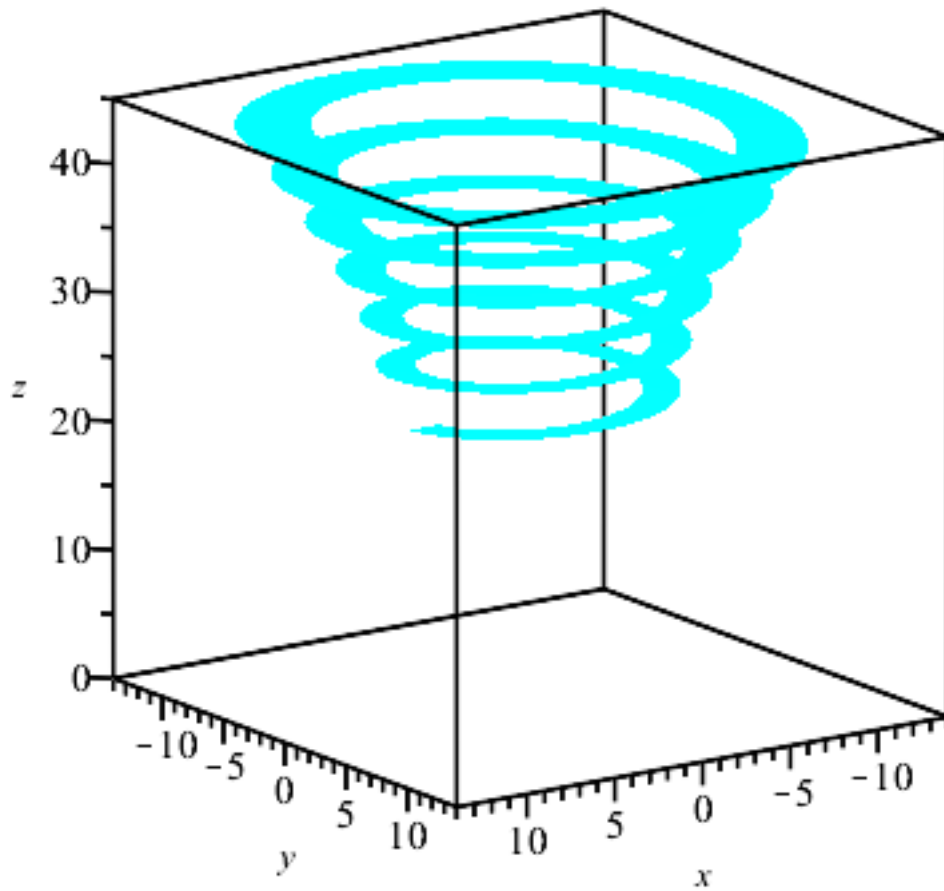
$$\text{Beregning: } z = c \cdot \sinh(v) \Leftrightarrow \frac{z}{c} = \sinh(v) \Leftrightarrow v = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{z}{c}\right)$$

$$\text{Da } z = \frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot p, \text{ bliver } v = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{z}{c}\right) = \operatorname{arcsinh}\left(-\frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c}\right) \text{ og } \theta = \frac{R}{2} \cdot p.$$

Hermed kan rampen udtrykkes:

$$vej_{snoetOP}(p, q) := \left\langle q \cdot \cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{R}{2} \cdot p\right), q \cdot \cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{R}{2} \cdot p\right), \frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot p \right\rangle :$$

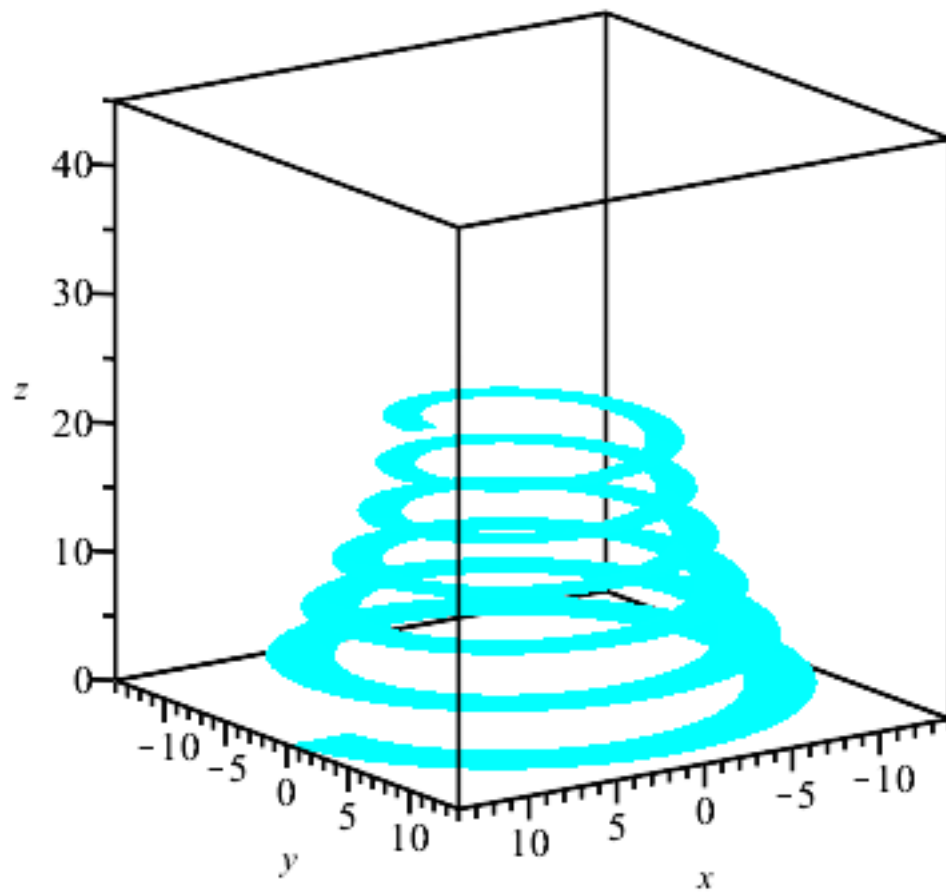
$$\text{plot3d}\left(vej_{snoetOP}(p, q) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, p = 0 .. 2 \cdot \pi, q = 7 - 1.8 .. 7, color = cyan, style = patchnogrid, labels = [x, y, z], view = [-14 .. 14, -14 .. 14, 0 .. 45], numpoints = 100000\right)$$



$vejOP := \% :$

$$vej_{snoetNED}(p, q) := \left\langle q \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \cos \left(-\frac{R}{2} \cdot p \right), q \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \sin \left(-\frac{R}{2} \cdot p \right), -\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot p \right\rangle :$$

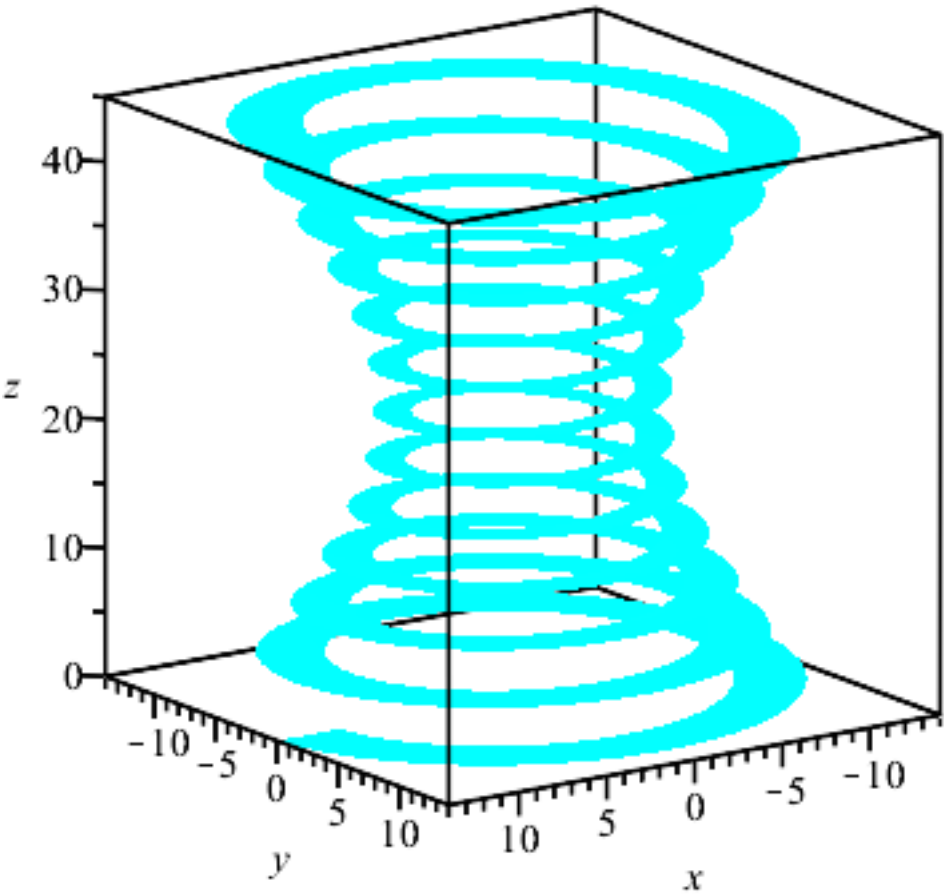
$plot3d \left(vej_{snoetNED}(p, q) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, p = 0 .. 2 \cdot \pi, q = 7 - 1.8 .. 7, color = cyan, style = patchnograd, labels = [x, y, z], view = [-14 .. 14, -14 .. 14, 0 .. 45], numpoints = 100000 \right)$



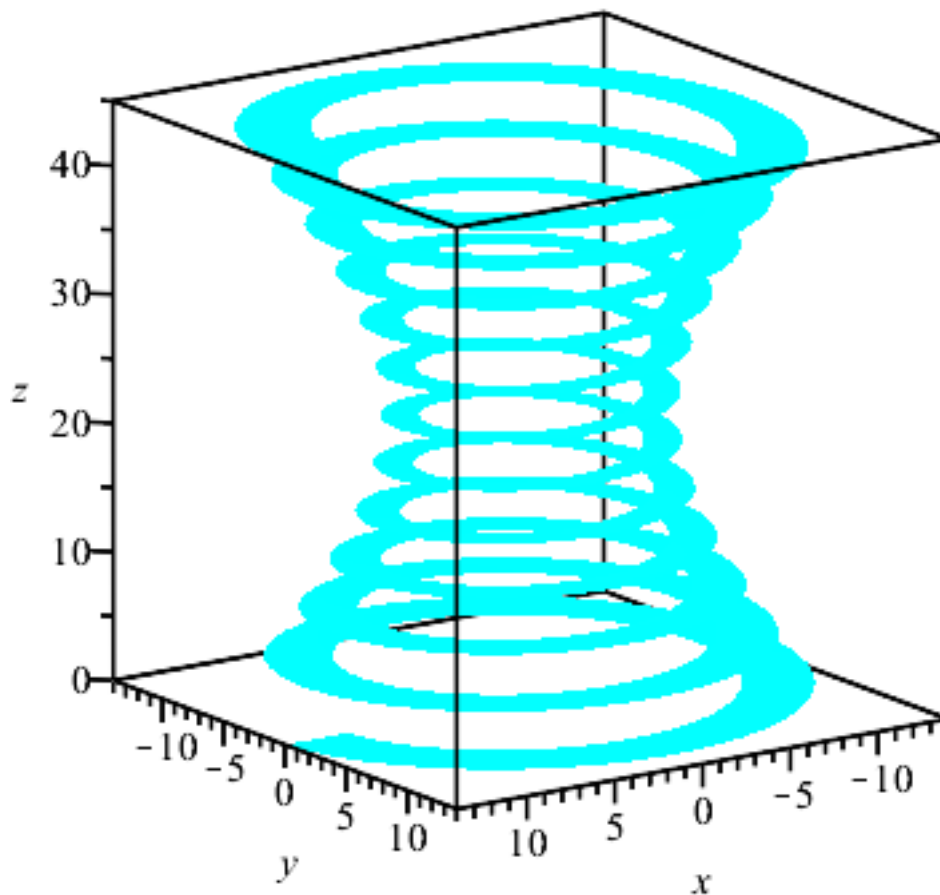
```
vejNED := %:
```

12 omgange i alt:

```
display(vejNED, vejOP)
```



gang := %:



Gelænder

Gelænderet i den indvendige side er **lodret**.

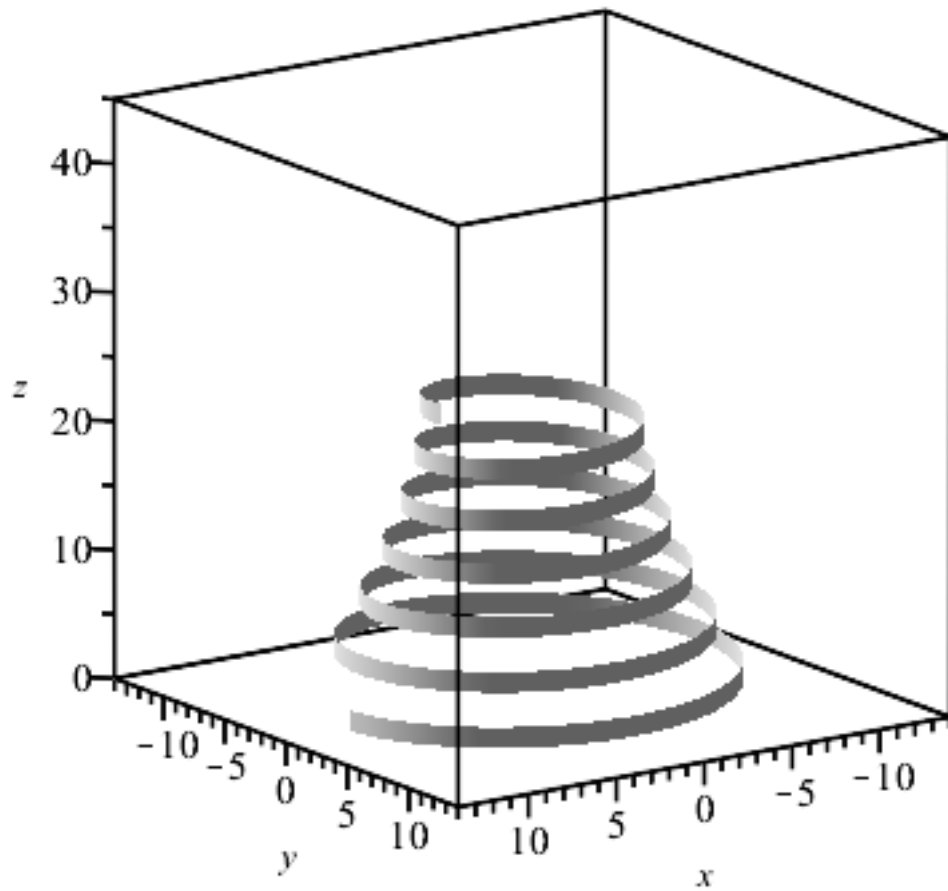
I den udvendige side følger gelænderet paraboloidens tangentflade på den nederste halvdel, mens det er lodret på den øverste halvdel!

Antager, at gelænderet er 1.6 m højt.

Gelænder inderst

$$gelænderINDERST_{snoetNED}(p, q) := \left\langle (7 - 1.8) \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \cos \left(-\frac{R}{2} \cdot p \right), (7 - 1.8) \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \sin \left(-\frac{R}{2} \cdot p \right), -\frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot p + q \right\rangle :$$

```
plot3d(gelænderINDERST_{snoetNED}(p, q) + <0, 0, \frac{45}{2}>, p=0..2\cdot\pi, q=0..1.6, color
= gray, style=patchnogrid, labels=[x, y, z], view=[-14..14, -14..14, 0..45],
numpoints=100000)
```



$gelænderINDERST_{NED} := \% :$

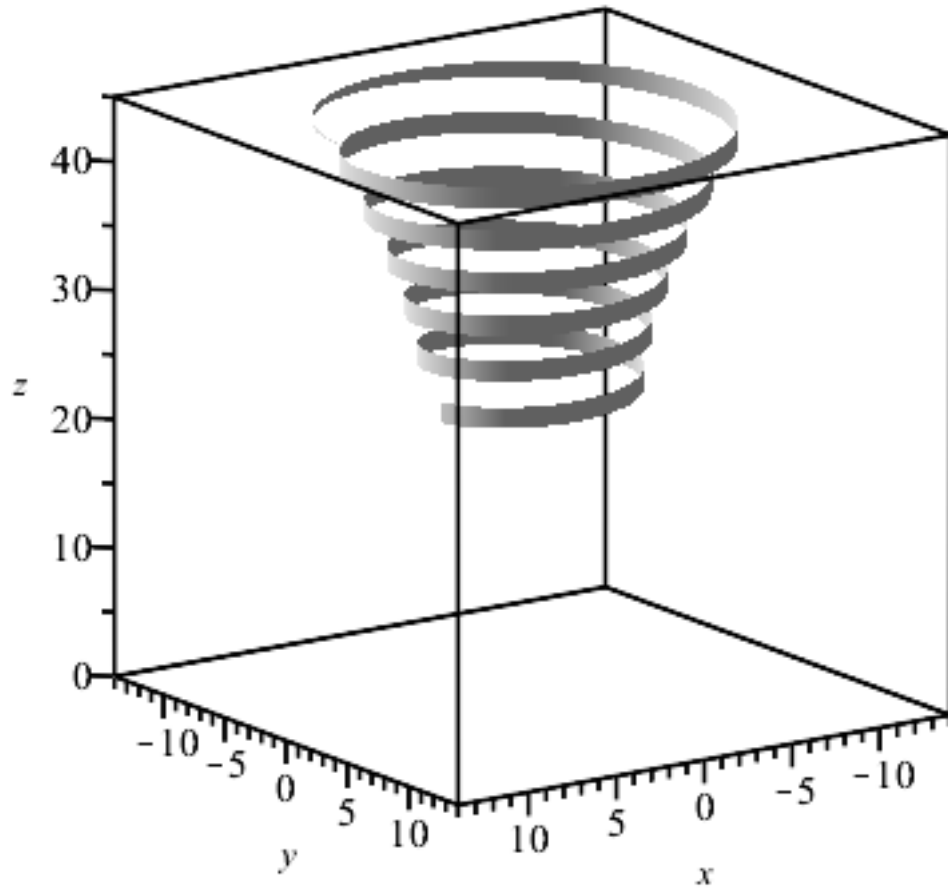
$$gelænderINDERST_{snoetOP}(p, q) := \left\langle (7 - 1.8) \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \cos \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), \right.$$

$$\left. (7 - 1.8) \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), \frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot p + q \right\rangle :$$

$$plot3d \left(gelænderINDERST_{snoetOP}(p, q) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, p = 0 .. 2 \cdot \pi, q = 0 .. 1.6, color = gray, \right.$$

$$style = patchnogrid, labels = [x, y, z], view = [-14 .. 14, -14 .. 14, 0 .. 45], numpoints$$

$$= 100000 \left. \right)$$



$gelænderINDERST_{OP} := \%:$

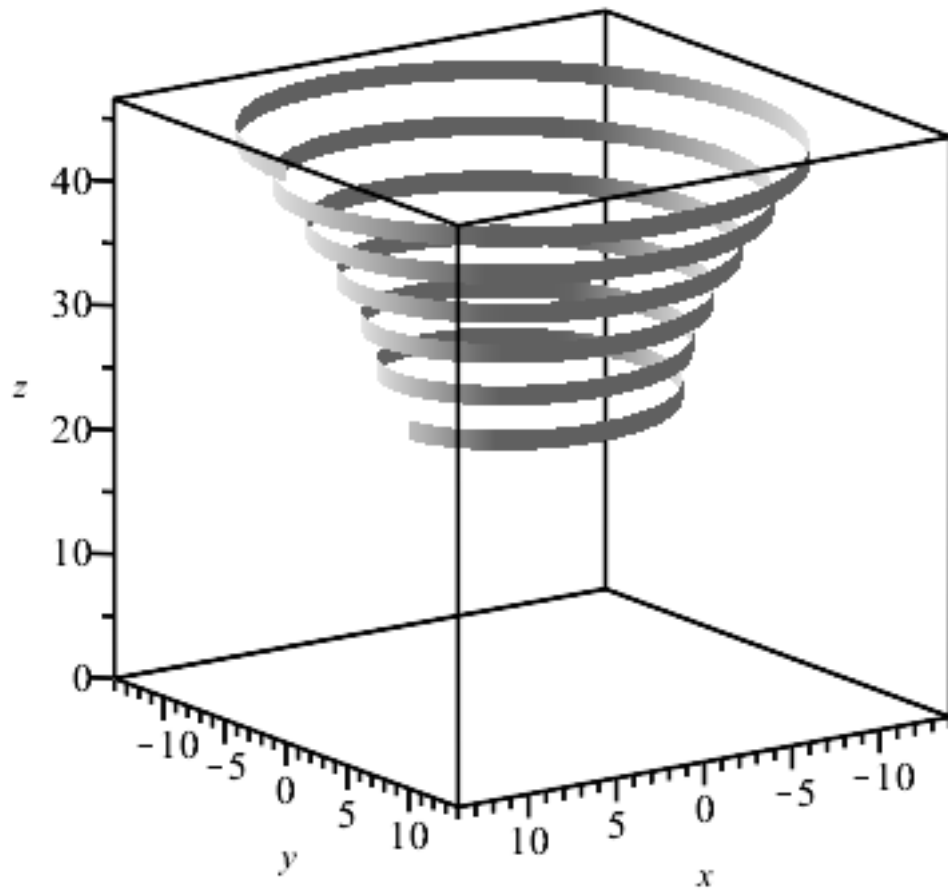
Gelænder yderst

Gelænderet i den indvendige side er **lodret**. I den udvendige side følger gelænderet paraboloidens tangentflade på den nederste halvdel, mens det er lodret på den øverste halvdel!

Antager, at gelænderet er 1.6 m højt.

$$gelænderYDERST_{snoetOP}(p, q) := \left\langle 7 \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \cos \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), 7 \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), \frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot p + q \right\rangle :$$

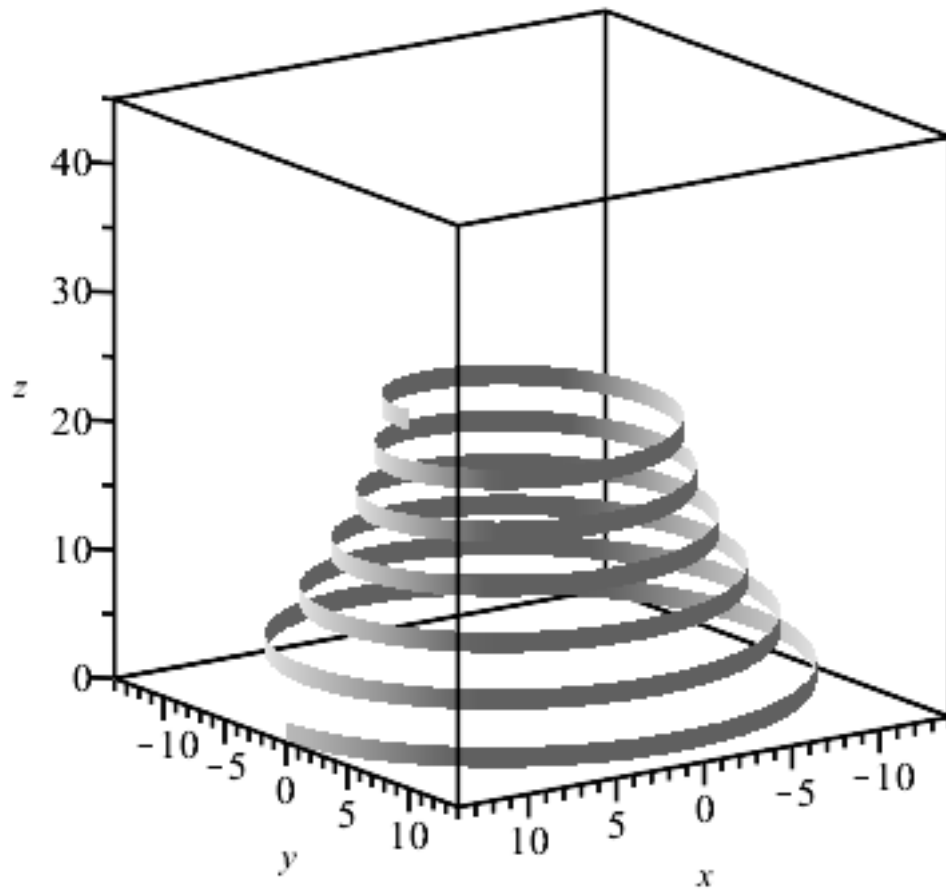
```
plot3d(gelænderYDERST_{snoetOP}(p, q) + <0, 0, \frac{45}{2}>, p=0..2\cdot\pi, q=0..1.6, color=gray,
style=patchnograd, labels=[x, y, z], view=[-14..14, -14..14, 0..45+1.6],
numpoints=100000)
```



$gelænderYDERST_{OP} := \%:$

$$gelænderYDERST_{snoetNED}(p, q) := \left\langle 7 \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \cos \left(-\frac{R}{2} \cdot p \right), 7 \right. \\ \left. \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \sin \left(-\frac{R}{2} \cdot p \right), -\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot p + q \right\rangle :$$

$plot3d \left(gelænderYDERST_{snoetNED}(p, q) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, p = 0 .. 2 \cdot \pi, q = 0 .. 1.6, color = gray, \right. \\ \left. style = patchnograd, labels = [x, y, z], view = [-14 .. 14, -14 .. 14, 0 .. 45], numpoints \right. \\ \left. = 100000 \right)$



Men gelænderet skal følge hyperboloidens tangenthældningen lodret på det nederste stykke, så det må gøres mere indviklet!

Der skal nu regnes med hyperblen fra starten af dokumentet.

Profilen af hyperboloiden er givet ved hyperblen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Leftrightarrow z^2 = c^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \Leftrightarrow z = \pm c \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

Dvs. differentiation giver, at

$$z' = \frac{d}{dx}(z) = \pm c \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{a^2} - 0 \right) = \pm \frac{2 \cdot c \cdot x}{a^2 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}$$

Hermed kan tagenthældningen lodret medregnes!

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2} \Leftrightarrow x^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{z^2}{c^2} \right) \Leftrightarrow x = \pm a \cdot \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}$$

Dette indsættes i z' :

$$z' = \pm \frac{2 \cdot c \cdot x}{a^2 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \pm \frac{2 \cdot c \cdot a \cdot \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}}{a^2 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) - 1}} = \pm \frac{2 \cdot c \cdot a \cdot \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}}{a^2 \cdot \sqrt{\frac{z^2}{c^2}}} =$$

$$\pm \frac{2 \cdot c \cdot a \cdot \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}}{a^2 \cdot \frac{z}{c}} = \pm 2 \cdot \frac{c^2}{a} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}}{z} = \pm 2 \cdot \frac{c^2}{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{c^2}}$$

På det nederste stykke i hyperblen er $z < 0$, og $z' < 0$.

Derfor må hældningen, som er negativ være: $z' = \pm 2 \cdot \frac{c^2}{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{c^2}}$ (husk at $z < 0$)

$\frac{45}{2}$

NB: I ovenstående udtryk for gelænderet yderst forneden er: $z = -\frac{2}{2 \cdot \pi} \cdot p$

Dvs. $z' = -\frac{2 \cdot c^2}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{45}{2} \cdot p\right)^2} + \frac{1}{c^2}}$

En retningsvektor **opad** er så i 2D, altså xz-planen givet ved:

$$\left\langle -1, \frac{2 \cdot c^2}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{45}{2} \cdot p\right)^2} + \frac{1}{c^2}} \right\rangle$$

I 3D, altså xyz, er den givet ved: $\left\langle -1, 0, \frac{2 \cdot c^2}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{45}{2} \cdot p\right)^2} + \frac{1}{c^2}} \right\rangle$

Retningsvektoren skal roteres med vinklen $-\frac{R}{2} \cdot p$ om z-aksen til det rigtige udgangspunkt.

Derfor lyder den:

$$\left\langle -1 \cdot \cos\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right), -1 \cdot \sin\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right), \frac{2 \cdot c^2}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{45}{2} \cdot p\right)^2} + \frac{1}{c^2}} \right\rangle$$

Retningsvektoren skal normeres, så den har længde 1:

$$\left\langle -1 \cdot \cos\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right), -1 \cdot \sin\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right), \frac{2 \cdot c^2}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{45}{2} \cdot p\right)^2} + \frac{1}{c^2}} \right\rangle$$

$$\left(\left(\left(-1 \cdot \cos\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right) \right)^2 + \left(-1 \cdot \sin\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right) \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot c^2}{a^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{45}{2} \right)^2 + \frac{1}{c^2}} + \frac{1}{c^2}} \right)^2 \right)^{1/2} \right)$$

Udgangspunktet for gelænderet er givet ved:

$$\left\langle 7 \cdot \cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c}\right)\right) \cdot \cos\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right), 7 \cdot \cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c}\right)\right) \cdot \sin\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right), -\frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot p \right\rangle$$

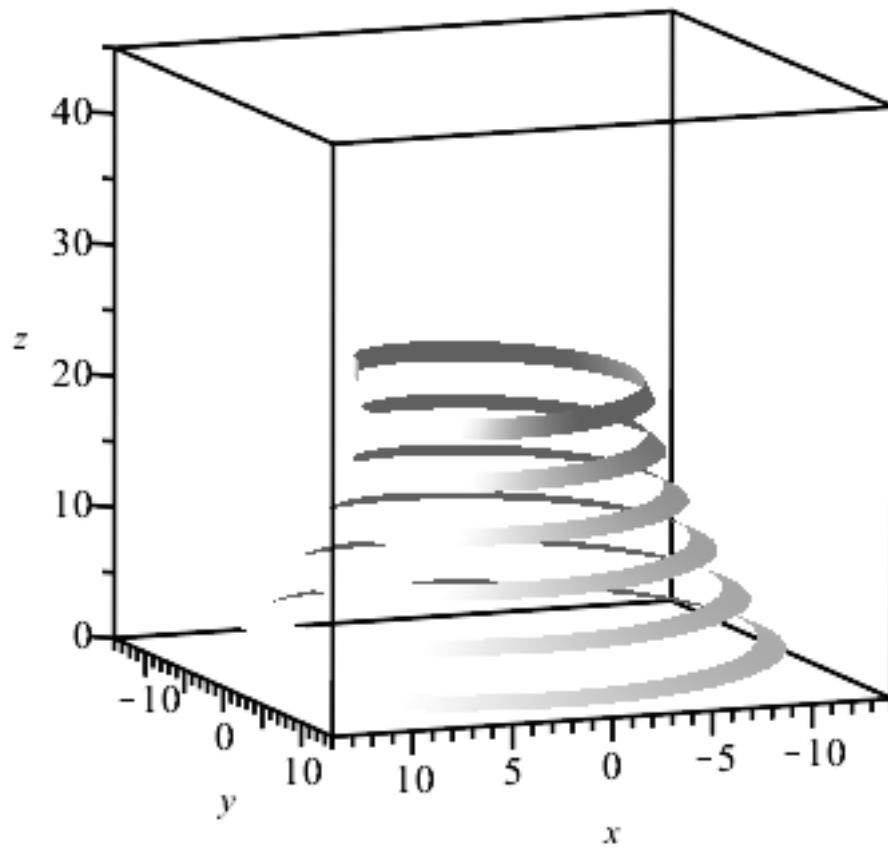
Så parameterfremstillingen af gelænderet yderst forneden er:

$$gelænderYDERST_{snoetNED}(p, q) := \left\langle 7 \cdot \cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c}\right)\right) \cdot \cos\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right), 7 \cdot \cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c}\right)\right) \cdot \sin\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right), -\frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot p \right\rangle + \left\langle -1 \cdot \cos\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right), -1 \cdot \sin\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right), \frac{2 \cdot c^2}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{45}{2} \right)^2 + \frac{1}{c^2}} + \frac{1}{c^2}} \right\rangle \\ \left(\left(\left(-1 \cdot \cos\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right) \right)^2 + \left(-1 \cdot \sin\left(-\frac{R}{2} \cdot p\right) \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot c^2}{a^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{45}{2} \right)^2 + \frac{1}{c^2}} + \frac{1}{c^2}} \right)^2 \right)^{1/2} \right) \cdot q :$$

Nu kan det **yderste gelænder forneden** plottes:

$$plot3d\left(gelænderYDERST_{snoetNED}(p, q) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, p = 0 \dots 2 \cdot \pi, q = 0 \dots 1.6, color = gray, \right. \\ \left. style = patchnograd, labels = [x, y, z], view = [-14 \dots 14, -14 \dots 14, 0 \dots 45], numpoints \right.$$

= 100000)



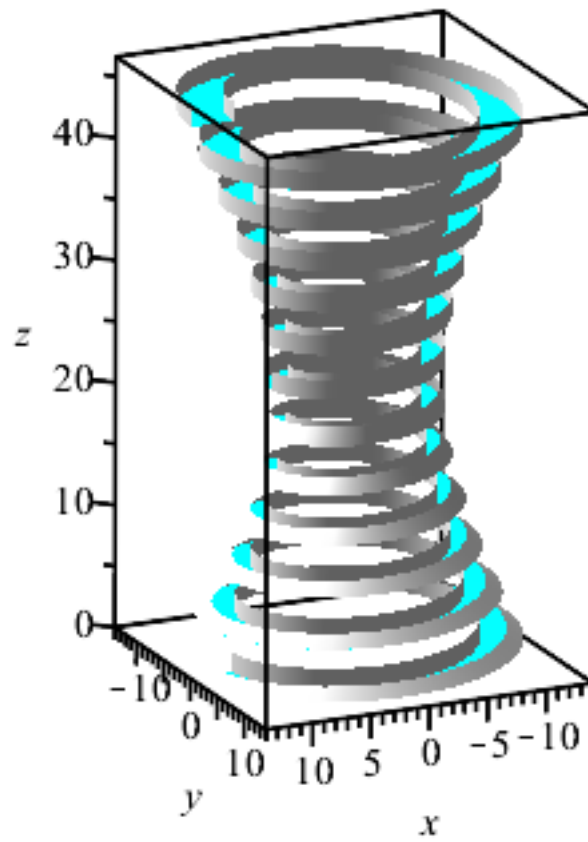
$gelænderYDERST_{NED} := \% :$

Gelænderet er på starten fornedet er naturlig overdrejet flad!

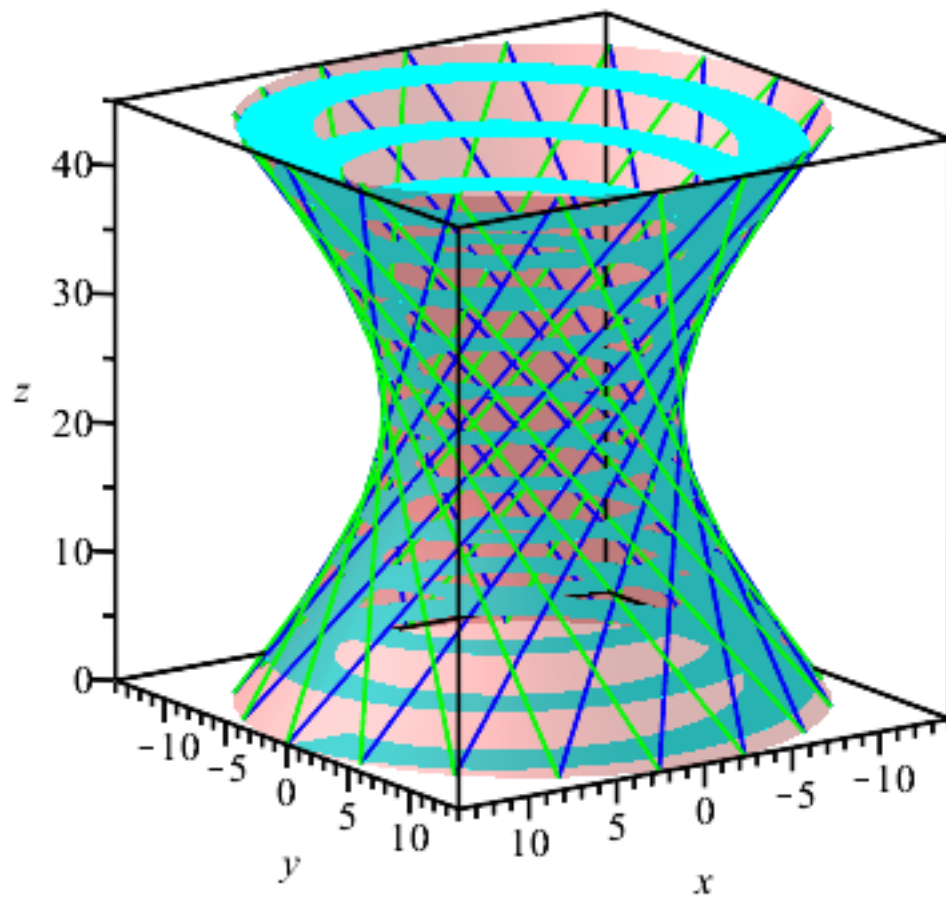
▼ Rampe med gelænder inderst og yderst

Skalatro figur:

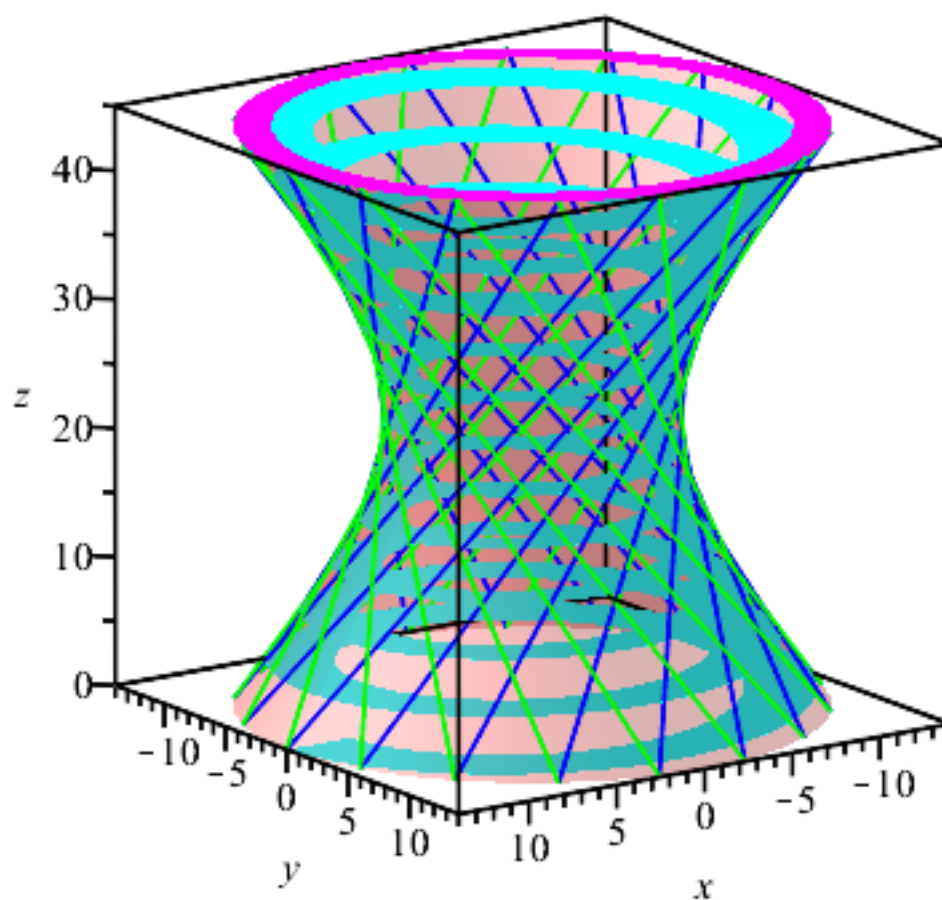
$display(vejNED, vejOP, gelænderINDERST_{NED}, gelænderINDERST_{OP}, gelænderYDERST_{OP},$
 $gelænderYDERST_{NED}, view = [-14 .. 14, -14 .. 14, 0 .. 45 + 1.6], scaling = constrained)$



▼ **Tårn med rampe**
display(ydre, gang)

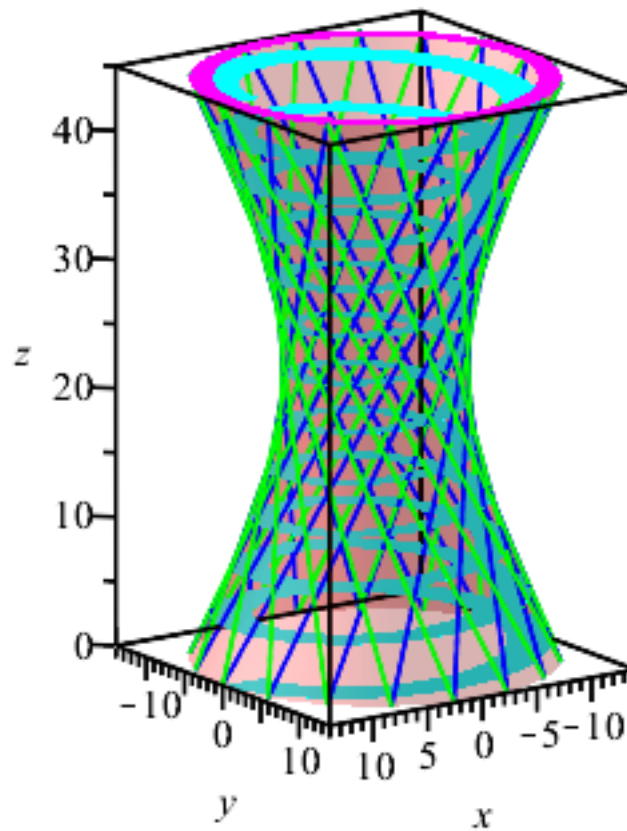


display(ydre, gang, ring)



Skalatro figur:

display(ydre, gang, ring, scaling=constrained)



Den cirkulære hyperboloide med 2 x 18 bærende rette linjer (blå og grønne) og en rampe (cyan), som går 12 gange rundt, samt en platform øverst (magenta).

Højden er 45 m, og top og bund har en diameter på 28 m, og midten er 14 m i diameter.

Beregninger på tårnet

Bevis for at linjerne ligger helt på hyperboloiden

Linjerne højre om er givet ved parameterfremstillingen:

$$lh(t, \alpha) = \begin{bmatrix} 7 \cos(\alpha) - 7 t \sin(\alpha) \\ 7 \sin(\alpha) + 7 t \cos(\alpha) \\ \frac{15 t \sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Koordinaterne indsættes i hyperboloidens ligning: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$\frac{(lh(t, \alpha)[1])^2}{a^2} + \frac{(lh(t, \alpha)[2])^2}{a^2} - \frac{(lh(t, \alpha)[3])^2}{c^2} = 1 =$$

$$\frac{(7 \cos(\alpha) - 7 t \sin(\alpha))^2}{49} + \frac{(7 \sin(\alpha) + 7 t \cos(\alpha))^2}{49} - t^2 = 1$$

$$\text{expand}(\%) = \cos(\alpha)^2 + t^2 \sin(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 + t^2 \cos(\alpha)^2 - t^2 = 1$$

$$\text{simplify}(\%) = 1 = 1$$

└ Dvs. til alle tidspunkter ligger punkterne på linjerne på hyperboloiden.

▼ Længden af en stålbjælke (ret linje)

For at beregne længden af en stålbjælke bestemmes koordinaterne til endepunkterne (her når $\alpha = 0$) :

$$lh(t_{\max}, 0) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 7 \\ 7\sqrt{3} \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$lh(-t_{\max}, 0) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 7 \\ -7\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Længden af stålbjælkerne:

$$\sqrt{(7-7)^2 + (7\sqrt{3} - (-7\sqrt{3}))^2 + (45-0)^2} = \sqrt{2613}$$

evalf(%) = 51.11751168

Dvs. alle stålbjælker er ca. 51.1 m lange.

Til sammenligning er højden af hyperboloiden 45 m, så stålbjælken er 6.1 m længere end hvis den blot gik lodret op.

▼ Drejningsvinklen af en stålbjælke (ret linje)

En linjes røringspunkt på bund-cirklen er placeret anderledes end røringspunktet på top-cirklen. Hvor mange grader er vinklen drejet?

Koordinaterne til endepunkterne på en linje (her når $\alpha = 0$) er:

$$lh(t_{\max}, 0) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 7 \\ 7\sqrt{3} \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$lh(-t_{\max}, 0) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 7 \\ -7\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Set i et vandret perspektiv, så er der tale om 2 punkter $(7, 7\sqrt{3})$ og $(7, -7\sqrt{3})$ på en cirkel med radius 14:

$$\sqrt{7^2 + (7\sqrt{3})^2} = 14$$

$P1 := \text{pointplot}([[7, 7\sqrt{3}], [7, -7\sqrt{3}]], \text{symbol}=\text{solidcircle}, \text{symbolsize}=20, \text{color}=\text{red}) :$

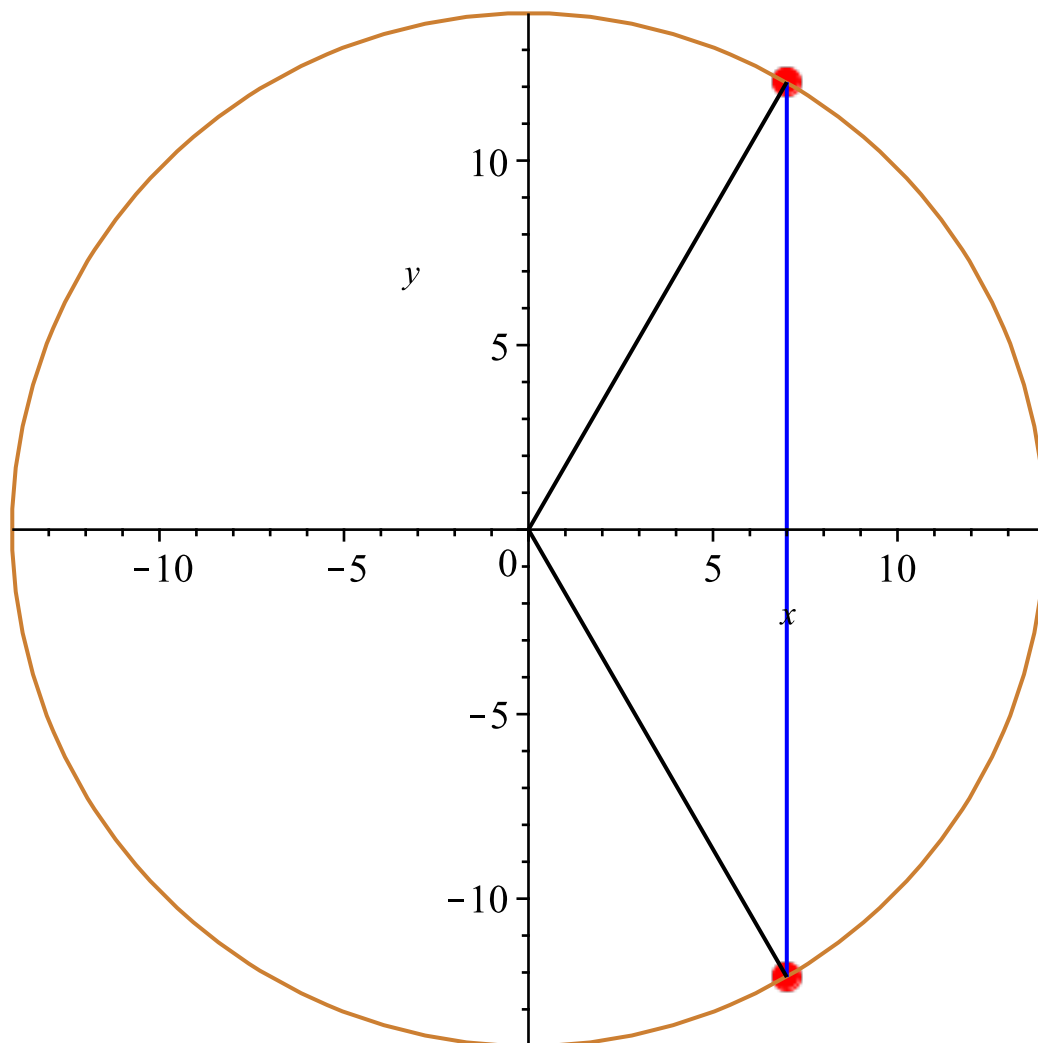
$P2 := \text{implicitplot}(x^2 + y^2 = 14^2, x=-14..14, y=-14..14, \text{color}=\text{gold}) :$

$P3 := \text{line}([7, 7\sqrt{3}], [7, -7\sqrt{3}], \text{color}=\text{blue}) :$

$P4 := \text{line}([7, 7\sqrt{3}], [0, 0], \text{color}=\text{black}) :$

$P5 := \text{line}([7, -7\sqrt{3}], [0, 0], \text{color}=\text{black}) :$

$\text{display}(P1, P2, P3, P4, P5)$



Drejningsvinklen β kan beregnes, idet man ud fra trigonometri får at $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

Så er $\frac{\beta}{2} = 60^\circ \Leftrightarrow \beta = 120^\circ$.

Dvs. drejningsvinklen for alle ståldragere (linjer) er præcis 120°

Ståldrageren (linjen) drejer altså præcist $\frac{1}{3}$ omgang.

▼ Overfladearealet af hyperboloiden

Parametriseringen af hyperboloidens overflade:

$$r(v, \theta) = \begin{bmatrix} 7 \cosh(v) \cos(\theta) \\ 7 \cosh(v) \sin(\theta) \\ \frac{15\sqrt{3} \sinh(v)}{2} \end{bmatrix}$$

Med parameterområderne $v \in [-v_{\max}, v_{\max}]$ og $\theta \in [0; 2 \cdot \pi]$.

hvor $v_{\max} = \operatorname{arcsinh}(\sqrt{3})$

Jacobi-faktoren:

$$Jacobi_F := \text{LinearAlgebra}[\text{Norm}](\text{diff}\sim(r(v, \theta), v) \times \text{diff}\sim(r(v, \theta), \theta), 2) =$$

$$\frac{7}{2} \left(675 |\cosh(v)|^4 |\cos(\theta)|^2 + 675 |\cosh(v)|^4 |\sin(\theta)|^2 + 196 |\sinh(v) \cos(\theta)|^2 \cosh(v) + \sinh(v) \sin(\theta)^2 \cosh(v) \right)^{1/2}$$

$Jacobi_F := \text{simplify}(Jacobi_F)$ assuming $-v_{\max} \leq v \leq v_{\max}, 0 \leq \theta \leq 2 \cdot \pi =$

$$\frac{7}{2} \cosh(v) \sqrt{871 \cosh(v)^2 - 196}$$

Overfladearealet af hyperboloiden:

$$A_1 := \int_{-\nu_{\max}}^{\nu_{\max}} \int_0^{2 \cdot \pi} 1 \cdot Jacobi_F d\theta dv =$$

$$7 \pi \left(6 \sqrt{274} + \frac{675}{1742} \sqrt{871} \operatorname{arccoth} \left(\frac{1967}{954616} \sqrt{274} \sqrt{871} \right) \right)$$

$$\text{evalf}(\%) = 2902.860784$$

Dvs. arealet af hyperboloidens krumme overflade er ca. 2903 m².

Hertil kommer så arealet af top og bund, som begge er cirkler med radius 14.

$$A_2 := \pi \cdot 14^2 = 196 \pi$$

$$\text{evalf}(\%) = 615.7521602$$

Dvs. arealet af top-cirklen og bund-cirklen er hver ca. 616 m²

Det samlede overflade-areal af den krumme hyperboloide samt bund og top er så:

$$A_1 + 2 \cdot A_2 = 7 \pi \left(6 \sqrt{274} + \frac{675 \sqrt{871} \operatorname{arccoth} \left(\frac{1967 \sqrt{274} \sqrt{871}}{954616} \right)}{1742} \right) + 392 \pi$$

$$\text{evalf}(\%) = 4134.365104$$

Dvs. det samlede overflade-areal af hyperboloiden incl. bund og top er ca. 4134 m²

Rumfanget af hyperboloiden

Parametrisering af den massive hyperboloide:

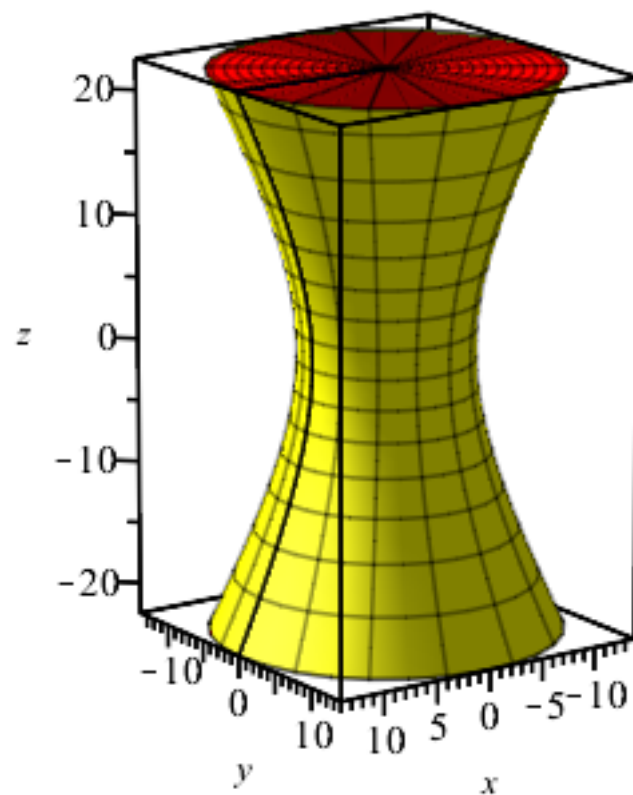
$$rv(v, \theta, w) := \langle w \cdot r(v, \theta)[1], w \cdot r(v, \theta)[2], r(v, \theta)[3] \rangle :$$

$$rv(v, \theta, w) = \begin{bmatrix} 7 w \cosh(v) \cos(\theta) \\ 7 w \cosh(v) \sin(\theta) \\ \frac{15 \sqrt{3} \sinh(v)}{2} \end{bmatrix}$$

Med parameterområderne $v \in [-v_{\max}, v_{\max}]$, $\theta \in [0, 2 \cdot \pi]$ og $w \in [0, 1]$.

$$\text{Integrator8}[\text{sideFlader}](rv, [-v_{\max}, v_{\max}, 0, 2 \cdot \pi, 0, 1], [10, 10, 10]) :$$

$$\text{display}(\%, \text{axes} = \text{box}, \text{labels} = [x, y, z])$$



Dvs. parametriseringen virker!

Jacobi-faktoren:

$$Jacobi_V := |LinearAlgebra[Determinant](VectorCalculus[Jacobian](rv(v, \theta, w), [v, \theta, w]))| = \frac{735}{2} \sqrt{3} |\cosh(v)|^3 |w| (\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)$$

$$Jacobi_V := simplify(Jacobi_V) \text{ assuming } -v_{\max} \leq v \leq v_{\max}, 0 \leq \theta \leq 2 \cdot \pi, 0 \leq w \leq 1 =$$

$$\frac{735}{2} \sqrt{3} w \cosh(v)^3$$

Rumfanget af den massive hyperboloide:

$$\int_{-v_{\max}}^{v_{\max}} \int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^1 1 \cdot Jacobi_V dw d\theta dv = \frac{1470 \sqrt{3} \pi (45 + 26 \sqrt{3})}{26 + 15 \sqrt{3}}$$

$$evalf(\%) = 13854.42361$$

Dvs. rumfanget af den massive hyperboloide er ca. 13 854 m³

▼ Længden af rampen langs yderkanten

Rampens øvre halvdel er parametriseret ved følgende (i følge tidligere afsnit):

$$vej_{snoetOP}(p, q) := \left\langle q \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \cos \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), q \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), \frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot p \right\rangle :$$

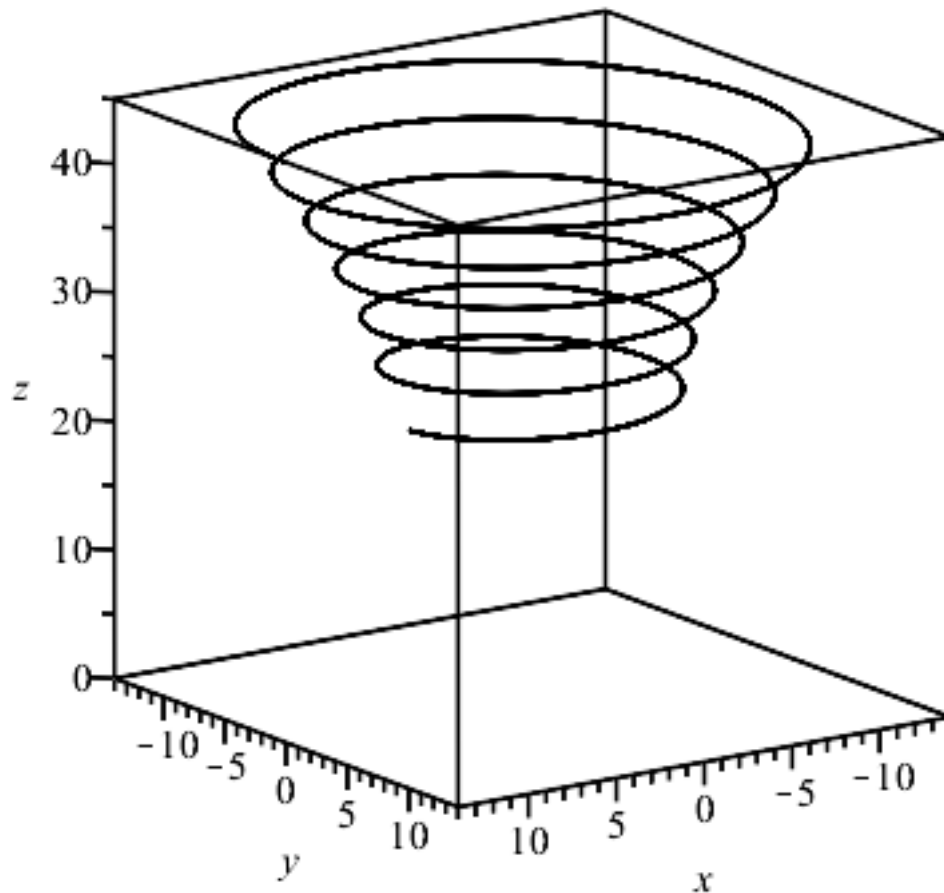
$$plot3d \left(vej_{snoetOP}(p, q) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, p = 0 .. 2 \cdot \pi, q = 7 - 1.8 .. 7, color = cyan, style = patchngrid, labels = [x, y, z], view = [-14 .. 14, -14 .. 14, 0 .. 45], numpoints = 100000 \right)$$

Ønskes kun den ydre kant, skal $q = 7$.

Dvs. yderkanten på øverste halvdel er parameteriseret ved dette udtryk, hvor $p \in [0; 2 \cdot \pi]$:

$$vej_{yderkantOPy}(p) := \left\langle 7 \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \cos \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), 7 \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), \frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot p \right\rangle + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle :$$

$$spacecurve \left(vej_{yderkantOPy}(p), p = 0 .. 2 \cdot \pi, color = black, labels = [x, y, z], view = [-14 .. 14, -14 .. 14, 0 .. 45], numpoints = 100000 \right)$$



Længden af yderkanten af rampens 6 omgange ønskes bestemt.

$Jacobi_Y := \text{LinearAlgebra}[\text{Norm}](\text{diff}(\text{vej}_{\text{yderkantOPy}}(p), p), 2) =$

$$\frac{3}{4} \left(784 \left| \frac{1}{2} \frac{\cos(6p)p}{\sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \pi^2} - \sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \sin(6p) \right|^2 + 784 \left| \frac{1}{2} \frac{\sin(6p)p}{\sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \pi^2} + \sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \cos(6p) \right|^2 + \frac{225}{\pi^2} \right)^{1/2}$$

$Jacobi_Y := \text{simplify}(Jacobi_Y) \text{ assuming } 0 \leq p \leq 2 \cdot \pi =$

$$\frac{3}{4} \frac{\sqrt{12544 \pi^4 + (18816 p^2 + 900) \pi^2 + 7056 p^4 + 871 p^2}}{\pi \sqrt{4 \pi^2 + 3 p^2}}$$

Længden:

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot Jacobi_Y dp = \int_0^{2\pi} \frac{3 \sqrt{12544 \pi^4 + (18816 p^2 + 900) \pi^2 + 7056 p^4 + 871 p^2}}{4 \pi \sqrt{4 \pi^2 + 3 p^2}} dp$$

$\text{evalf}(\%) = 365.0199001$

Den samlede længde langs yderkanten er så det dobbelte.

$$2 \cdot \% = 730.0398002$$

Dvs. længden af yderkanten af rampens 12 omgange er ca. 730 m

▼ Længden af rampen langs inderkanten

Rampens øvre halvdel er parametriseret ved følgende (i følge tidligere afsnit):

$$vej_{snoetOP}(p, q) := \left\langle q \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \cos \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), q \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), \frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot p \right\rangle :$$

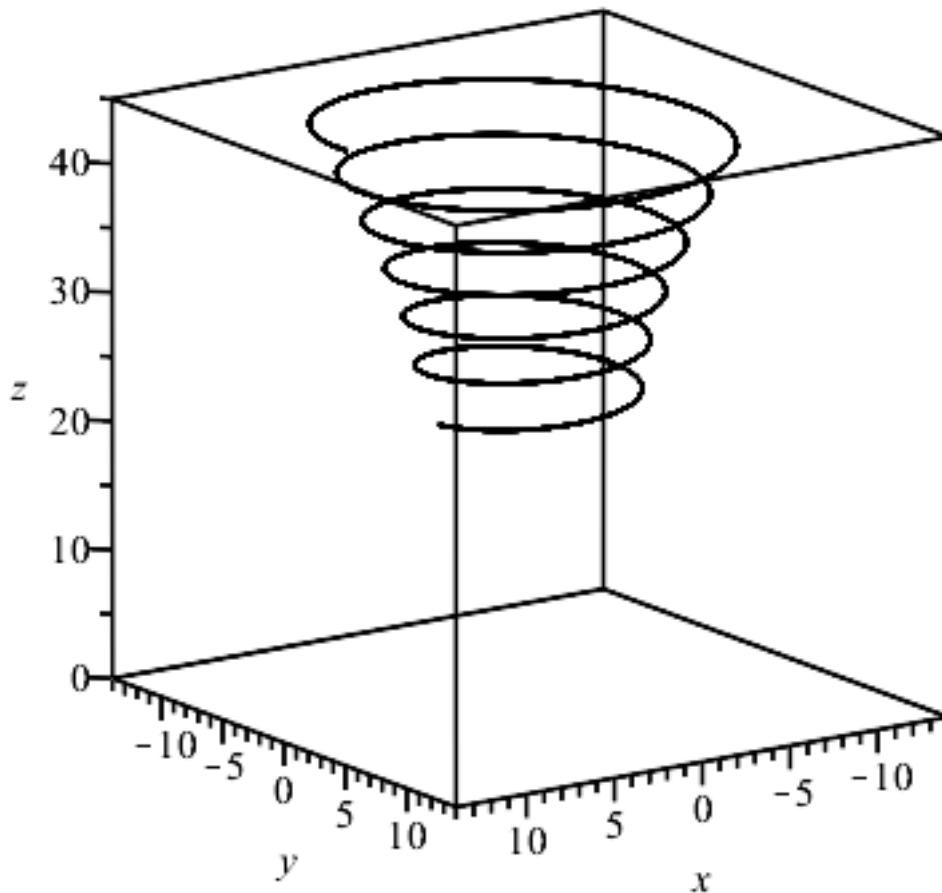
$$plot3d \left(vej_{snoetOP}(p, q) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, p = 0 .. 2 \cdot \pi, q = 7 - 1.8 .. 7, color = cyan, style = patchngrid, labels = [x, y, z], view = [-14 .. 14, -14 .. 14, 0 .. 45], numpoints = 100000 \right)$$

Ønskes kun den indre kant, skal $q = 7 - 1.8$.

Dvs. inderkanten på øverste halvdel er parameteriseret ved dette udtryk, hvor $p \in [0; 2 \cdot \pi]$:

$$vej_{yderkantOPi}(p) := \left\langle (7 - 1.8) \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \cos \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), (7 - 1.8) \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), \frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot p \right\rangle + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle :$$

$$spacecurve \left(vej_{yderkantOPi}(p), p = 0 .. 2 \cdot \pi, color = black, labels = [x, y, z], view = [-14 .. 14, -14 .. 14, 0 .. 45], numpoints = 100000 \right)$$



Længden af inderkanten af rampens 6 omgange ønskes bestemt.

$$Jacobi_Y := \text{LinearAlgebra}[\text{Norm}](\text{diff}(\text{vej_yderkantOPi}(p), p), 2) =$$

$$\frac{1}{4} \left(16 \left| \frac{7.800000000 \cos(6p) p}{\sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}}} - 15.60000000 \sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \sin(6p) \right|^2 \right. \\ \left. + 16 \left| \frac{7.800000000 \sin(6p) p}{\sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}}} + 15.60000000 \sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \cos(6p) \right|^2 + \frac{2025}{\pi^2} \right)^{1/2}$$

$$Jacobi_Y := \text{simplify}(Jacobi_Y) \text{ assuming } 0 \leq p \leq 2 \cdot \pi =$$

$$\frac{14896.90268 \sqrt{p^2 + 12.64713208} \sqrt{p^2 + 13.87294506}}{\sqrt{3.000000 \cdot 10^6 p^2 + 3.947841762 \cdot 10^7}}$$

Længden:

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot Jacobi_Y dp = \int_0^{2\pi} \frac{14896.90268 \sqrt{p^2 + 12.64713208} \sqrt{p^2 + 13.87294506}}{\sqrt{3.000000 \cdot 10^6 p^2 + 3.947841762 \cdot 10^7}} dp$$

$$\text{evalf}(\%) = 271.5960898$$

Den samlede længde langs inderkanten er så det dobbelte.
 $2 \cdot \% = 543.1921796$

Dvs. længden af inderkanten af rampens 12 omgange er ca. 543 m

Arealet af rampens 12 omgange

Rampens øvre halvdel er parametriseret ved følgende (i følge tidligere afsnit):

$$vej_{snoetOP}(p, q) := \left\langle q \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \cos \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), q \cdot \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{p}{c} \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{R}{2} \cdot p \right), \frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot \pi} \cdot p \right\rangle :$$

$$\text{plot3d} \left(vej_{snoetOP}(p, q) + \left\langle 0, 0, \frac{45}{2} \right\rangle, p = 0 .. 2 \cdot \pi, q = 7 - 1.8 .. 7, color = cyan, style = patchngrid, labels = [x, y, z], view = [-14 .. 14, -14 .. 14, 0 .. 45], numpoints = 100000 \right)$$

Arealet af den ene halvdel af rampen kan så beregnes:

$$Jacobi_R := \text{LinearAlgebra}[Norm] \left(\text{diff} \sim (vej_{snoetOP}(p, q), p) \times \text{diff} \sim (vej_{snoetOP}(p, q), q), 2 \right)$$

$$Jacobi_R :=$$

(2.8.1)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \left(\frac{2025 \left| 4 + \frac{3p^2}{\pi^2} \right| |\sin(6p)|^2}{\pi^2} + \frac{2025 \left| 4 + \frac{3p^2}{\pi^2} \right| |\cos(6p)|^2}{\pi^2} \right. \\ & + 16 \left(\left(\frac{3q \cos(6p)p}{2 \sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \pi^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - 3q \sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \sin(6p) \right) \sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \sin(6p) - \left(\frac{3q \sin(6p)p}{2 \sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \pi^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 3q \sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \cos(6p) \right) \sqrt{4 + \frac{3p^2}{\pi^2}} \cos(6p) \right)^2 \Bigg) \end{aligned}$$

$$Jacobi_R := \text{simplify}(Jacobi_R) \text{ assuming } 0 \leq p \leq 2 \cdot \pi, 7 - 1.8 \leq q \leq 7 =$$

$$\frac{3}{8} \frac{\sqrt{4\pi^2 + 3p^2} \sqrt{64\pi^2 q^2 + 48p^2 q^2 + 225}}{\pi^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{7-1.8}^7 1 \cdot \text{Jacobi}_R \, dq \, dp =$$

$$0.0001899772192 \left(\right.$$

$$\int_0^{2\pi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3 \cdot p^2 + 39.47841760}} \left(\sqrt{4 \pi^2 + 3 p^2} \left(700 \cdot \sqrt{2352 \cdot p^2 + 31176.07940} \right. \right. \\ \left. \sqrt{3 \cdot p^2 + 39.47841760} - 104 \cdot \sqrt{32448 \cdot p^2 + 432623.5648} \sqrt{3 \cdot p^2 + 39.47841760} \right. \\ \left. - 5625 \cdot \operatorname{arcsinh} \left(1.386666667 \sqrt{3 \cdot p^2 + 39.47841760} \right) \right. \\ \left. + 5625 \cdot \operatorname{arcsinh} \left(1.866666667 \sqrt{3 \cdot p^2 + 39.47841760} \right) \right) dp \\ \text{evalf}(\%) = 829.8653610$$

Det samlede areal af rampen er så det dobbelte:

$$2 \cdot \% = 1659.730722$$

Dvs. arealet af rampen, som laver 12 omgange, er ca. 1660 m²