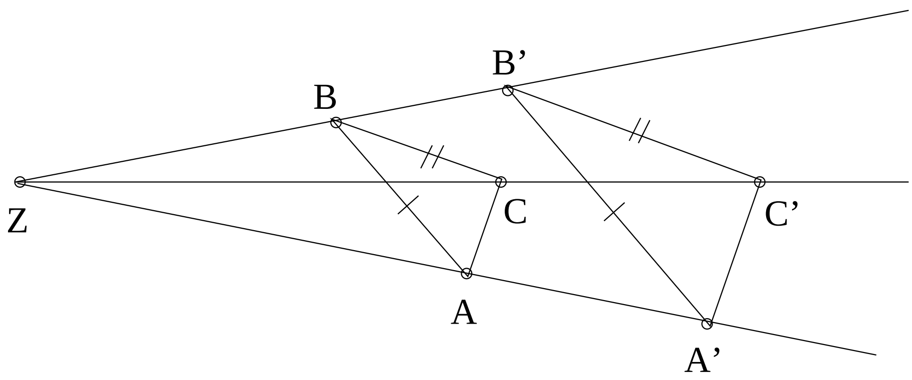
PROJEKTIVE GEOMETRIE

(Kurzskript)



Erich Hartmann

Technische Universität Darmstadt

SS 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Die affine Ebene

Definition 1.1 *Es sei* $\mathbf{P} \neq \emptyset$*, die Menge der* Punkte*,* $\mathbf{B} \neq \emptyset$*, die Menge der* Blöcke*,* $\mathbf{I}$ *sei Teilmenge von* $\mathbf{P} \times \mathbf{B}$*, die* Inzidenzrelation*.*
Dann heißt $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{I})$ Inzidenzstruktur*.*

Definition 1.2 $\mathbf{P} =$ *Punkte der Anschauungsebene,*
$\mathbf{G} =$ *Geraden der Anschauungsebene und* $\mathbf{I}{=}\in$*.*
$(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ *heißt* reelle affine Ebene*.*

1.1 Grundlegende Inzidenzeigenschaften

A1: Zu $P \neq Q \in \mathbf{P}$ gibt es genau eine Gerade g mit $P, Q \in g$.

A2: (Paralellen-Axiom) Zu $P \in \mathbf{P}, g \in \mathbf{G}$ gibt es genau ein $h \in \mathbf{G}$ mit $P \in h, g \cap h = \emptyset$ oder $g = h$.

A3: Es gibt wenigstens 3 nicht auf einer Gerade liegende Punkte.

Definition 1.3
1. *Gerade* g *heißt* paralellel *zu Gerade* h *(*$h \parallel h$*) genau dann, wenn* $g \cap h =$ *oder* $g = h$ *gilt.*
2. *Für Gerade* g *sei* $\parallel_g = \{h \in \mathbf{G} \mid h \parallel g\}$*.*
3. *Für zwei Punkte* $A \neq B$ *sei* $A \vee B$ *die Gerade durch* A, B*.*
4. *Für zwei nicht parallele Geraden* $g \neq h$ *sei* $g \wedge h$ *der Schnittpunkt von* g, h*.*

Definition 1.4 *Eine Inzidenzstruktur* $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ *mit den Eigenschaften* **A1** *–* **A3** *heißt* affine Ebene*.*

Lemma 1.1 *Ist* $\mathbf{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ *eine affine Ebene, so gilt:*
a) Die $\parallel$*-Relation ist eine Äquivalenzrelation.* *b)* $|\mathbf{P}| \geq 4$*.*

1.2 Affine Koordinatenebene über $\mathbb{R}$ bzw. Schiefkörper K

Definition 1.5 *Für*
$\mathbf{P} = \mathbb{R}^2$*,*
$$\mathbf{G} = \{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\} \mid (0, 0) \neq (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$= \{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + d\} \mid m, d \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = c\} \mid c \in \mathbb{R}\}$$
heißt $\mathbf{A}(\mathbb{R}) := (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ reelle affine Koordinatenebene*.*

Verallgemeinerung:

Definition 1.6 *Ersetzt man* $\mathbb{R}$ *durch einen beliebien Körper oder Schiefkörper* K*, so ist die Inzidenzstruktur* $\mathbf{A}(K)$ *immer noch eine affine Ebene.*
$\mathbf{A}(K)$ *heißt* affine Koordinatenebene über K*.*

1.3 Kollineationen von $\mathbf{A}(K)$

Definition 1.7 *Es sei* $\mathbf{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ *eine affine Ebene. Eine Permutation* κ *von* $\mathbf{P}$*, die eine Permutation von* $\mathbf{G}$ *induziert heißt* Kollineation von $\mathbf{A}$.
Koll$\mathbf{A}$*:= Menge der Kollineationen von* $\mathbf{A}$.

Bemerkung: Bei einer Kollineation bleibt $\parallel$ erhalten.

Resultat 1.2 *Ist* κ *eine Kollineation von* $\mathbf{A}(K)$*, dann gibt es* $a, b, c, d, s, t \in K$ *und einen Automorphismus* α *von* K *so, daß*

$$\kappa : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a\alpha(x) + b\alpha(y) + s \\ c\alpha(x) + d\alpha(y) + t \end{pmatrix}$$

Satz 1.3 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *besitzt nur die Identität als Automorphismus.*

Definition 1.8 *Eine Kollineation* κ *von* $\mathbf{A}(K)$ *heißt* Affinität, *wenn* $\alpha = id$ *ist.*
Aff($\mathbf{A}(K)$) :=*Menge der Affinitäten von* $\mathbf{A}(K)$.

Satz 1.4 *a) Aff(*$\mathbf{A}(K)$*) ist eine Gruppe.*
b) Aff($\mathbf{A}(K)$*) operiert auf den Tripeln nicht kollinearer Punkte scharf transitiv (d.h. zu* $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ *gibt es genau ein* $\varphi \in$ *Aff(*$\mathbf{A}(K)$*) mit* $\varphi(P_i) = Q_i, i = 1, 2, 3$*).*

Definition 1.9 *Es sei* κ *eine Kollineation einer affinen Ebene* $\mathbf{A}$.

a) κ *heißt* Dilatation, *wenn jede Gerade* g *zu ihrem Bild parallel ist:* $g \parallel \kappa(g)$.
$\Delta :=$ *Menge der Dilatationen.*

b) ... Translation , *wenn* κ *fixpunktfreie Dilatation ist.*
$T :=$ *Menge der Translationen.*

c) ... Streckung am Punkt P, *wenn* κ *Dilatation mit Fixpunkt* P *ist.*
$\Delta_P :=$ *Menge ...*

d) ... Streckung an der Gerade g in Richtung der Gerade $h \nparallel g$, *wenn* κ *die Gerade* g *punktweise festläss t und* $\kappa(h) = h$ *ist.*
$\Sigma_{gh} :=$ *Menge ...*

e) ... Scherung an der Gerade g, *wenn* κ *die Gerade* g *punktweise und jede Paralelle zu* g *als Ganzes festläss t.*
$\Sigma_{gg} :=$ *Menge ...*

Lemma 1.5 *Für die Dilatationen* Δ *einer affinen Ebene* $\mathbf{A}$ *gilt:*

a) Δ *ist eine Gruppe.*

b) $\delta \in \Delta,\ P \in \mathbf{P},\ P \neq \delta(P) \Rightarrow P \vee \delta(P)$ *ist fix.*

c) Eine Dilatation mit zwei Fixpunkten ist die Identität.

d) Eine Dilatation ist durch die Bilder zweier Punkte eindeutig bestimmt.

Lemma 1.6 *Es sei* $\mathbf{A}$ *eine affine Ebene,* T *die Menge der Translationen.*

a) $\tau \in T,\ \tau \neq id,\ Q \neq P \in \mathbf{P} \Rightarrow P \vee \tau(P) \parallel Q \vee \tau(Q)$.
(τ *ist durch* $P \to \tau(P)$ *eindeutig bestimmt.)*

b) T *ist Normalteiler von* Δ.

Beispiele in A(K):

1. $(x,y)^\top \to (x+s, y+s)^\top,\ s,t \in K$ Translationen
2. $(x,y)^\top \to (x, dy)^\top,\ 0 \neq d \in K$ Streckungen an x-Achse
3. $(x,y)^\top \to (ax, y)^\top,\ 0 \neq a \in K$ Streckungen an y-Achse
4. $(x,y)^\top \to (xa, ya)^\top,\ 0 \neq a \in K$ Streckungen am Punkt (0,0)
5. $(x,y)^\top \to (x+by, y)^\top,\ b \in K$ Scherungen an x-Achse
6. $(x,y)^\top \to (x, cx+y)^\top,\ c \in K$ Scherungen an y-Achse

Lemma 1.7 *Für* $\mathbf{A}(K)$ *gilt:*

a) Δ_P, Σ_{gh} *und* Σ_{gg} *sind Untergruppen von* $Koll\mathbf{A}$.

b) T *ist transitiv auf* $\mathbf{P}$. T *ist kommutativ.*

c) Δ_P *ist transitiv auf* $g \setminus \{P\}$, g *Gerade durch* P.

d) Σ_{gh} *ist transitiv auf* $k \setminus g$, *wobei* k *Gerade und* $k \parallel h$ *ist.*

e) $\Delta = T \cup \bigcup_{P \in \mathbf{P}} \Delta_P = T\Delta_{(0,0)}$.

Lemma 1.8 *Für* $\mathbf{A}(K)$, K *Körper gilt:*

a) Δ_P, $P \in \mathbf{P}$ *ist kommutativ.*

b) Σ_{gh}, $g, h \in \mathbf{G}$, *ist kommutativ.*

Definition 1.10 *Es sei* $\mathbf{A}$=$\mathbf{A}(K)$. *Für 3 kollineare Punkte* A, B, P *mit* $\vec{AP} = t\vec{PB}$ *heißt die Zahl* t *das* Teilverhältnis $[AP : PB]$.

Lemma 1.9 *Eine Affinität von* $\mathbf{A}(K)$ *lässt das Teilverhältnis invariant.*

1.4 Der Satz von DESARGUES, der Satz von PAPPUS

Satz 1.10 *(DESARGUES) Es sei* $\mathbf{A}$=$\mathbf{A}$*(K), (K Schiefkörper).*
Sind Z, A, A', Z, B, B', Z, C, C' *drei Tripel kollinearer Punkte auf drei verschiedenen Geraden durch* Z *und ist*
$A \vee B \parallel A' \vee B'$, $B \vee C \parallel B' \vee C'$, *so auch* $A \vee C \parallel A' \vee C'$.

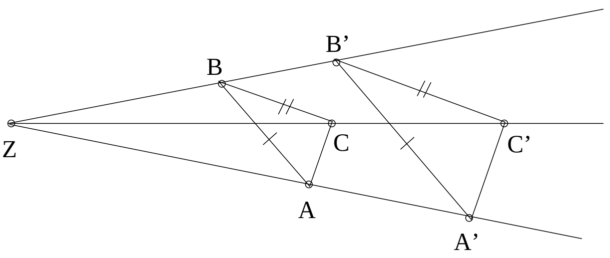


Abbildung 1: Der Satz von DESARGUES

Bemerkung:
Eine affine Ebene $\mathbf{A}$, in der der Satz von DESARGUES für alle Konfigurationen gilt, lässt sich als $\mathbf{A}$(K) über einem Schiefkörper K beschreiben. Solch eine Ebene heißt deshalb *desarguessch.*

Satz 1.11 *(PAPPUS) Es sei* $\mathbf{A}$=$\mathbf{A}$*(K), K Körper (!!).*
Liegen die Ecken eines Sechsecks $P_1, Q_2, P_3, Q_1, P_2, Q_3$ *abwechselnd auf zwei Geraden* g, h*, jedoch keine auf beiden, und sind zwei Seitenpaare parallel, so ist auch das dritte Seitenpaar parallel.*

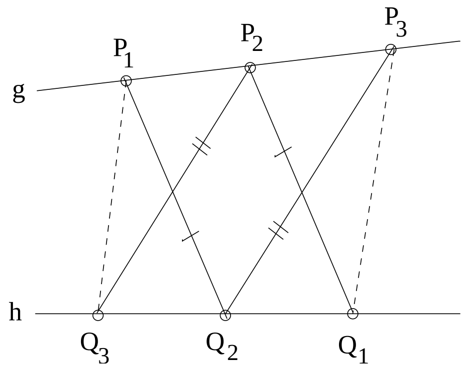


Abbildung 2: Der Satz von PAPPUS

Bemerkung:
Eine affine Ebene $\mathbf{A}$, in der der Satz von PAPPUS für alle Konfigurationen gilt, lässt sich als $\mathbf{A}$(K) über einem **Körper** K beschreiben. Solch eine Ebene heißt deshalb *pappussch.*

1.5 Bemerkungen über endliche affine Ebenen

Definition 1.11 *Eine affine Ebene* $\mathbf{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ *heißt* **endlich**, *wenn* $|\mathbf{P}| < \infty$ *ist.*

Lemma 1.12 *Ist* $\mathbf{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ *eine endliche affine Ebene,* $g \in \mathbf{G}$ *und* $n := |g|$*, so gilt:*

a) Jede Gerade enthält genau n *Punkte. Jeder Punkt liegt auf genau* $n + 1$ *Geraden.*

b) $|\mathbf{P}| = n^2$, $|\mathbf{G}| = n^2 + n$.

2 Die projektive Ebene über einem Körper K

2.1 Definition einer projektiven Ebene

Definition 2.1 *Es sei* $\mathbf{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ *eine affine Ebene.*
$\overline{\mathbf{P}} := \mathbf{P} \cup \{\|_g \mid g \in \mathbf{G}\}, \quad \overline{\mathbf{G}} := \{g \cup \|_g \mid g \in \mathbf{G}\} \cup \{\|_g \mid g \in \mathbf{G}\}, \quad g_\infty := \{\|_g \mid g \in \mathbf{G}\}$

$$\overline{P} I \overline{g} := \begin{cases} P \in g & \textit{falls } P \in \mathbf{P}, g \in \mathbf{G} \\ g \in \|_g & \textit{falls } \overline{P} = \|_g \\ \in, & \textit{falls } \overline{P} \in g_\infty, \overline{g} = g_\infty \end{cases}$$

$\overline{\mathbf{A}} := (\overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{G}}, I)$ *heißt* projektive Erweiterung *von* $\mathbf{A}$.

Grundlegende Inzidenzeigenschaften von $\overline{\mathbf{A}}$:

P1: Zu $\overline{P} \neq \overline{Q} \in \overline{\mathbf{P}}$ gibt es genau eine Gerade $\overline{g}$ mit $\overline{P}, \overline{Q}\ I\ \overline{g}$.

P2: Zu $\overline{g} \neq \overline{h} \in \overline{\mathbf{G}}$ gibt es genau einen Punkt $\overline{P}$ mit $\overline{P}\ I\ \overline{g}, \overline{h}$.

P3: Es gibt wenigstens 4 Punkte, von denen keine drei auf einer Gerade liegen.

Definition 2.2 *Eine Inzidenzstruktur* $\mathfrak{P} := (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ *mit den Eigenschaften* **P1-P3** *heißt* projektive Ebene.

Definition 2.3 *Es sei* $\mathfrak{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ *eine projektive Ebene. Eine Permutation* κ *von* $\mathbf{P}$*, die eine Permutation von* $\mathbf{G}$ *induziert heißt* Kollineation *von* $\mathfrak{P}$.
Kol$\mathfrak{P}$*:= Menge der Kollineationen von* $\mathfrak{P}$.

Lemma 2.1 *Ist* $\mathfrak{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ *eine projektive Ebene und* $g \in \mathbf{G}$*, so ist*
$\mathfrak{P}_g = (\mathbf{P}_g, \mathbf{G}_g, \in)$ *mit* $\mathbf{P}_g := \mathbf{P} \setminus g,\ \mathbf{G}_g := \{h \setminus g \mid g \neq h \in \mathbf{G}\}$,
eine affine Ebene. g *heißt* Ferngerade *von* $\mathfrak{P}_g$.

2.2 Projektive Ebene über einem Körper K

Definition 2.4 *Es sei* K *ein Körper und*
$\mathbf{P}_1 := K^2 \cup K \cup \{\infty\},\ \infty \notin K,$
$\mathbf{G}_1 := \{\{(x,y) \in K^2 \mid y = mx + d\} \cup \{(m)\} \mid m, d \in K\}$
$\quad \cup \{\{(x,y) \in K^2 \mid x = c\} \cup \{\infty\} \mid c \in K\} \cup \{(m) \mid m \in K\} \cup \{\infty\}$
$g_\infty := \{(m) \mid m \in K\} \cup \{\infty\}$
$\mathfrak{P}_1(K) := (\mathbf{P}_1, \mathbf{G}_1, \in)$ *heißt* inhomogenes Modell *der projektiven Ebene über dem Körper* K.

Definition 2.5 *Es sei* K *ein Körper,* V *der Vektorraum* K^3 *and* $\vec{0} := (0,0,0)^T$,
$\mathbf{P}_2 := \{$*1-dim. Unterräume von* $V\} = \{< \vec{x} > \mid \vec{0} \neq \vec{x} \in V\}$,
wobei $< \vec{x} >$ *der von* $\vec{x}$ *aufgespannte Unterraum ist.*
$\mathbf{G}_2 := \{$*2-dim. Unterräume von* $V\}$
$\quad = \{\{< (x_1, x_2, x_3)^T > \in \mathbf{P}_2 \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\} \mid \vec{0} \neq (a,b,c)^T \in K^3\}$.
$\mathfrak{P}_2(K) := (\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \in)$ *heißt* homogenes Modell *der projektiven Ebene über* K.

Satz 2.2 $\mathfrak{P}_1(K)$ *und* $\mathfrak{P}_2(K)$ *sind isomorphe projektive Ebenen.*

Bemerkung:
$\mathfrak{P}_1(K)$ und $\mathfrak{P}_2(K)$ sind auch für einen Schiefkörper K isomorphe projektive Ebenen.

2.3 Kollineationen von $\mathfrak{P}_1(K)$ und $\mathfrak{P}_2(K)$

Satz 2.3 *Jede Kollineation einer affinen Ebene* $\mathbf{A}$ *lässt sich eindeutig zu einer Kollineation der projektiven Erweiterung* $\overline{\mathbf{A}}$ *von* $\mathbf{A}$ *fortsetzen.*

Lemma 2.4 *Jede Kollineation* κ *von* $\mathbf{A}(K)$ *lässt sich zu einer Kollineation* $\overline{\kappa}$ *von* $\mathfrak{P}_1(K)$ *unf damit auch von* $\mathfrak{P}_2(K)$ *fortsetzen.* $\overline{\kappa}$ *wird in* $\mathfrak{P}_2(K)$ *(homogenes Modell) von einer semilinearen Abbildung induziert. Ist* κ *eine Affinität, d.h.* $\alpha = id$, *so wird* $\overline{\kappa}$ *in* $\mathfrak{P}_2(K)$ *von einer linearen Abbildung induziert.*

Lemma 2.5 *Jede bijektive lineare Abbildung* φ *von* K^3 *induziert eine Kollineation* Φ *von* $\mathfrak{P}_2(K)$ *(und damit auch von* $\mathfrak{P}_1(K)$*).*

Definition 2.6

$$\begin{aligned} GL(3,K) &= \{M \mid M \, ist\ 3\times 3\text{–}Matrix\ \ddot{u}ber\ K, \det M \neq 0\} \\ PGL(3,K) &= \{\varphi_M \mid \varphi_M : \text{ von } M \text{ induzierte Koll. in } \mathfrak{P}_2(K), M \in GL(3,K)\} \end{aligned}$$

Die Elemente von $PGL(3,K)$ *heißen* projektive Kollineationen *oder* Projektivitäten.

Lemma 2.6 *Es gilt:* $PGL(3,K) \cong GL(3,K)/Z$, *wobei*
$Z := \{\lambda E \mid 0 \neq \lambda \in K, E : 3\times 3\text{–}Einheitsmatrix\}$
(Z *ist das Zentrum der Gruppe* $GL(3,K)$*.)*

Definition 2.7 *Vier Punkte einer projektiven Ebene heißen* in allgemeiner Lage, *wenn keine 3 kollinear sind.*

Lemma 2.7 *Sind* A, B, C, D *vier Punkte (aus* $\mathfrak{P}_2(K)$*) in allgemeiner Lage, so lässt sich immer eine Koordinatentransformation so durchführen, dass*

$$A =< (1,0,0)^\top >, \quad B =< (0,1,0)^\top >, \quad C =< (0,0,1)^\top >, \quad D =< (1,1,1)^\top > .$$

Folgerungen:

Lemma 2.8 *a)Sind* P_1, P_2, P_3, P_4 *und* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 *jeweils Punkte von* $\mathfrak{P}_2(K)$ *in allgemeiner Lage, so gibt es genau eine Projektivität* $\pi \in PGL(3,K)$ *mit* $\pi(P_i) = Q_i$ *für* $i = 1,..,4$, *d.h.* $PGL(3,K)$ *operiert scharf transitiv auf den geordneten Quadrupeln von Punkten in allgemeiner Lage.*
b) Eine Projektivität π, *die vier Punkte in allgemeiner Lage festlässt, ist die Identität.*

Lemma 2.9 *Wählt man in* $\mathfrak{P}_2(K)$ *(oder* $\mathfrak{P}_1(K)$*) eine beliebige Gerade* g, *so ist die affine Ebene* $\mathfrak{P}_{i,g}$ *(s.o.) mit* g *als Ferngerade zur affinen Ebene* $\mathbf{A}(K)$ *isomorph.*

Definition 2.8 *a)* $SL(3,K) = \{M \in GL(3,K) \mid \det M = 1\}$ *heißt* spezielle lineare Gruppe.
b) $PSL(3,K) = \{\varphi_M \mid M \in SL(3,K)\}$ *heißt* spezielle projektive Gruppe.

Definition 2.9 *Es sei* $\Gamma L(3,K) = \{\gamma \mid \gamma$ *bijektive seminlineare Abbildung von* $K^3\}$.
($\gamma(\lambda\vec{x}) = \alpha(\lambda)\gamma(\vec{x})$ *für* $\lambda \in K, \vec{x} \in K^3, \alpha$*: Automorphismus von* K*.)*

Resultat 2.10 *Jede Kollineation* κ *von* $\mathfrak{P}_2(K)$ *wird von einer semilinearen Abbildung* $\gamma \in \Gamma L(3,K)$ *induziert.*
$P\Gamma L(3,K) := \{$*von* γ *induzierte Koll.* $\mid \gamma \in \Gamma L(3,K)\}$.

Satz 2.11 *Für* $K = \mathbb{R}$ *gilt:* $PSL(3,\mathbb{R}) = PGL(3,\mathbb{R}) = P\Gamma L(3,\mathbb{R})$.

2.4 Zentralkollineationen

Definition 2.10 *Eine Kollineation π einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$, die das Geradenbüschel eines Punktes Z elementweise festlässt, heißt* Zentralkollineation *oder* Perspektivität *und Z das* Zentrum *von π.*

Lemma 2.12 *a) Es sei $\pi \neq id$ eine Zentralkollineation der projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ mit dem Zentrum Z. Dann gibt es eine Gerade a, die π punktweise festlässt und $a \cup \{Z\}$ ist die Fixpunktmenge von π. a heißt* Achse *von π und π eine (Z, a)–*Perspektivität*. Ist $z \notin a$, so heißt π* Homologie*, ist $z \in a$, so heißt π* Elation.
b) Eine Zentralkollineation ist durch ihr Zentrum Z, Achse a und ein Paar Punkt–Bildpunkt eindeutig bestimmt.

Lemma 2.13 *Es sei $\mathfrak{P}$ eine projektive Ebene, π eine (Z, a)–Perspektivität und κ eine beliebige Kollineation. Dann ist $\kappa\pi\kappa^{-1}$ eine $(\kappa(Z), \kappa(a))$–Perspektivität.*

Lemma 2.14 *Ist π eine (Z, a)–Perspektivität $\neq id$ und κ eine Kollineation mit $\pi\kappa = \kappa\pi$, dann gilt: $\kappa(Z) = Z$ und $\kappa(A) = A$ für $A \in a$.*

2.5 Das Dualitätsprinzip

Definition 2.11 *Es sei $\mathfrak{S} := (\mathbf{P}, \mathbf{G}, I)$ eine Inzidenzstruktur, $\mathbf{P}^* := \mathbf{G}$, $\mathbf{G}^* := \mathbf{P}$ und $I^* \subset \mathbf{G} \times \mathbf{P}$ mit:*
Für $g \in \mathbf{G}$, $P \in \mathbf{P}$ gilt: $gI^*P \Leftrightarrow PIg$.
$\mathfrak{S} = (\mathbf{P}^*, \mathbf{G}^*, I^*)$ heißt die zu $\mathfrak{S}$ duale Inzidenzstruktur.

Lemma 2.15 *Die zu einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ duale Inzidenzstruktur $\mathfrak{P}^*$ ist eine projektive Ebene. $\mathfrak{P}^*$ heißt die zu $\mathfrak{P}$* duale projektive Ebene.

Definition 2.12 *Es sei $\mathfrak{P}$ eine projektive Ebene. Eine Kollineation von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}^*$ heißt* Dualität.
Eine Dualität π von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}^*$ heißt Polarität*, wenn aus $X \in \pi(Y)$ folgt $Y \in \pi(X)$.*

Bemerkung: a) Nicht jede projektive Ebene ist isomorph zu ihrer dualen Ebene.
b) Allerdings: Jede projektive Ebene $\mathfrak{P}_i(K)$ ist isomorph zu ihrer dualen Ebene.

Satz 2.16 *Es sei $\underline{S}$ eine Aussage über eine projektive Ebene $\mathfrak{P}$, die mit den Axiomen $\underline{P1}, \underline{P2}, \underline{P3}$ bewiesen werden kann. Dann ist die duale Aussage $\underline{D}$, die aus $\underline{S}$ durch Vertauschen der Worte*
Punkt $\leftrightarrow$ Gerade, liegt auf $\leftrightarrow$ geht durch, kollinear $\leftrightarrow$ kopunktal,
schneiden $\leftrightarrow$ verbinden, ...
entsteht eine wahre Aussage von $\mathfrak{P}$.

2.6 Die Sätze von DESARGUES und PAPPUS in einer projektiven Ebene

Satz 2.17 *(DESARGUES) In $\mathfrak{P}_i(K)$ gilt:*
Sind Z, A, A', Z, B, B', Z, C, C' drei Tripel kollinearer Punkte auf drei verschiedenen Geraden durch Z und ist
$U := (A \vee B) \wedge (A' \vee B')$, $V := (B \vee C) \wedge (B' \vee C')$, $W := (A \vee C) \wedge (A' \vee C')$,
so gilt U, V, W sind kollinear.

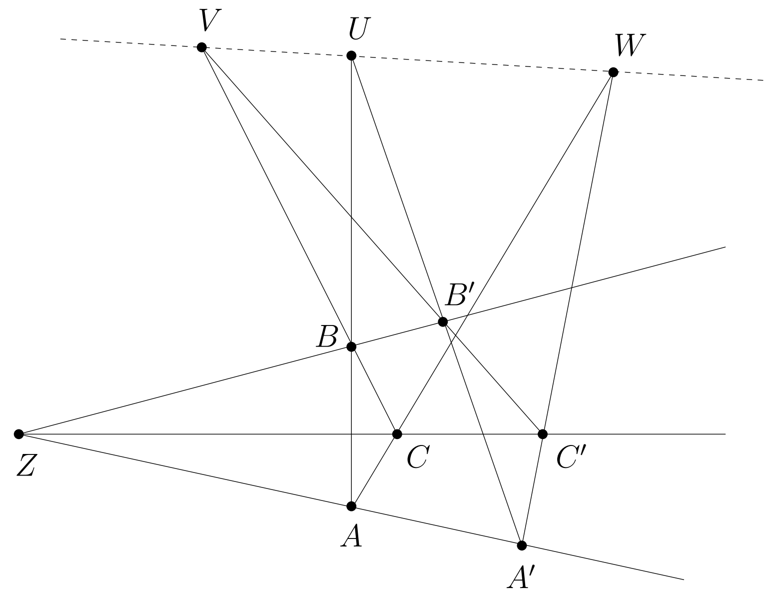


Abbildung 3: projektiver Satz von Desargues

Satz 2.18 *(dualer DESARGUES) In* $\mathfrak{P}_i(K)$ *gilt:*
Sind z, a, a', z, b, b', z, c, c' *drei Tripel kopunktaler Geraden und*
$u := (a \vee b) \wedge (a' \vee b')$, $v := (b \vee c) \wedge (b' \vee c')$, $w := (a \vee c) \wedge (a' \vee c')$,
so gilt u, v, w *sind kopunktal.*

Satz 2.19 *(PAPPUS) In* $\mathfrak{P}_i(K)$ *gilt:*
Liegen die Ecken eines Sechsecks $P_1, Q_2, P_3, Q_1, P_2, Q_3$ *abwechselnd auf zwei Geraden* g, h, *jedoch keine auf beiden, und ist*
$U := (P_1 \vee Q_2) \wedge (P_2 \vee Q_1)$, $V := (P_2 \vee Q_3) \wedge (P_3 \vee Q_2)$, $W := (P_3 \vee Q_1) \wedge (P_1 \vee Q_3)$,
so gilt: U, V, W *sind kollinear.*

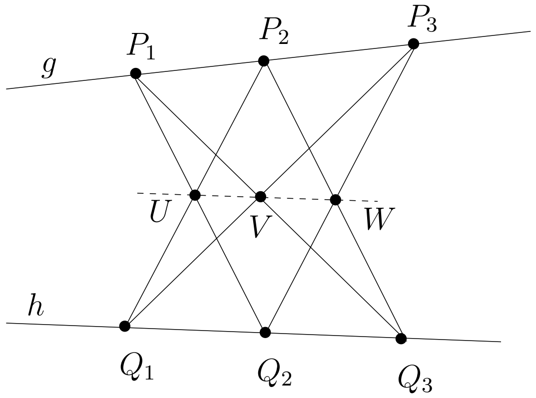


Abbildung 4: projektiver Satz von Pappus

Satz 2.20 *(dualer PAPPUS = THOMSEN) In* $\mathfrak{P}_i(K)$ *gilt:*
Gehen die Geraden eines Sechsseits $p_1, q_2, p_3, q_1, p_2, q_3$ *abwechselnd durch zwei Punkte* G, H, *jedoch keine durch beide, und ist*
$u := (p_1 \vee q_2) \wedge (p_2 \vee q_1)$, $v := (p_2 \vee q_3) \wedge (p_3 \vee q_2)$, $w := (p_3 \vee q_1) \wedge (p_1 \vee q_3)$,
so gilt: u, v, w *sind kopunktal.*

2.7 Transitivitätseigenschaften

Lemma 2.21 *In einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ gilt:*
a) Die (Z,a)–Homologien (–Elationen) mit festem Zentrum Z und fester Achse a bilden eine Gruppe $H(Z,a)$ (bzw. $E(Z,a)$).
b) Die Elationen mit fester Achse a (bzw. Zentrum Z) bilden eine Gruppe $E(a)$ (bzw. E(Z)).

Definition 2.13 *Es sei $\mathfrak{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ eine projektive Ebene, $Z \in \mathbf{P}, a \in \mathbf{G}$. Die Gruppe der (Z,a)–Perspektivitäten heißt* linear transitiv, *wenn es zu jedem Punkt $P \notin \{Z\} \cup a$ und $Q \in P \vee Z \setminus (\{Z\} \cup a)$ eine (Z,a)–Perspektivität π gibt mit $\pi(P) = Q$.*

Lemma 2.22 *In $\mathfrak{P}_i(K)$ gilt:*
a) Die (Z,a)–Homologien (–Elationen) mit festem Zentrum Z und fester Achse a sind linear transitiv.
b) Die Elationen mit fester Achse a operieren transitiv auf $\mathbf{P} \setminus a$.

Lemma 2.23 *In $\mathfrak{P}_i(K)$ gilt:*
a) Die von den Elationen erzeugte Kollineationsgruppe $Koll_E$ ist “dreieckstransitiv”.
b) Die von den Homologien erzeugte Kollineationsgruppe $Koll_H$ ist gleich der Gruppe Π der Projektivitäten, falls $|K| \geq 3$.

2.8 Perspektive und projektive Abbildungen von Geraden

Definition 2.14 *Es sei $\mathfrak{P}$ eine projektive Ebene, $g \neq h$ zwei Geraden und $Z \notin g \cup h$ ein Punkt. Dann heißt die Abbildung*

$\pi : \begin{cases} g \to h \\ X \to (Z \vee X) \wedge h \end{cases}$ *eine* perspektive Abbildung von g auf h mit Zentrum Z.

Eine Abbildung einer Gerade g auf eine Gerade l heißt projektiv, *wenn sie Produkt von endlich vielen perspektiven Geradenabbildungen ist.*

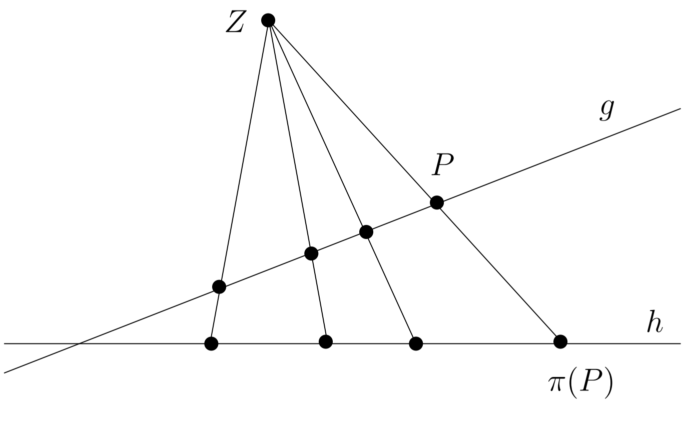


Abbildung 5: perspektive Abbildung einer Gerade g auf eine Gerade h

Lemma 2.24 *Es sei $\mathfrak{P}$ eine projektive Ebene, g, h zwei Geraden und Π_{gh} die Menge der projektiven Abbildungen von g auf h, Dann gilt:*
a) Π_{gh} operiert 3-fach transitiv.
b) Π_{gg} ist eine Gruppe.

2.9 Das Doppelverhältnis in $\mathfrak{P}_i(K)$

Definition 2.15 *Für vier Punkte $A_i : \vec{a_i} = \vec{x_0} + a_i\vec{r}, i = 1, 2, 3, 4,$ von $\mathbf{A}(K)$ heißt*

$$(A_1, A_2|A_3, A_4)_a := \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2} : \frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_2}$$

das affine Doppelverhältnis *von A_1, A_2, A_3, A_4.*

Definition 2.16 *Für vier Punkte $A_i =< a_i\vec{a} + b_i\vec{b} >, i = 1, 2, 3, 4,$ der projektiven Gerade $g = \{< a\vec{a} + b\vec{b} > \mid (a, b) \neq (0, 0)\}$ heißt*

$$(A_1, A_2|A_3, A_4) := \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_3b_2 - a_2b_3} : \frac{a_4b_1 - a_1b_4}{a_4b_2 - a_2b_4}$$

das Doppelverhältnis *von A_1, A_2, A_3, A_4. (Für $b_i = 1$ erhält man das affine DV.)*

Lemma 2.25 *$(A_1, A_2|A_3, A_4)$ hängt nur von den Punkten $A_1, ..A_4$ ab, d.h. bei einer Koordinatentransformation oder beim Übergang zu einer inhomogenen Beschreibung bleibt das DV invariant. Speziell gilt:*
Für $A_1 =< \vec{a} >, A_2 =< \vec{b} >, A_3 =< \vec{a} + \vec{b} >, A_4 =< x\vec{a} + \vec{b} >$ ist $(A_1, A_2|A_3, A_4) = x$.

Lemma 2.26 *a) Das Doppelverhältnis (in $\mathfrak{P}_i(K)$) ist bei projektiven Kollineationen invariant. b) Das Doppelverhältnis (in $\mathfrak{P}_i(K)$) ist bei projektiven Geradenabbildungen invariant.*

Satz 2.27 *(Fundamentalsatz) In der projektiven Ebene $\mathfrak{P}_i(K)$ (K: Körper !) ist die Menge Π_{gh} von projektiven Abbildungen einer projektiven Gerade g auf eine Gerade h* **scharf** *3-fach transitiv.*

Lemma 2.28 *Ist in einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ die Menge der projektiven Abbildungen Π_{gh} einer Gerade g auf eine Gerad h* **scharf** *3-fach transitiv, so ist eine Abbildung $\pi \in \Pi_{gh}$ mit $g \wedge h$ als Fixpunkt* **perspektiv***.*

Satz 2.29 *Eine projektive Ebene $\mathfrak{P}$ ist genau dann* **pappussch***, d.h. isomorph zu einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}_i(K)$ mit K : Körper, wenn für je zwei Geraden g, h die Menge Π_{gh}* **scharf** *3-fach transitiv operiert.*

Definition 2.17 *Für 4 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 durch einen Punkt Z und Geraden g, h nicht durch Z seien $A_i = g \wedge g_i, B_i = h \wedge g_i$. Dann gilt $(A_1, A_2|A_3, A_4) = (B_1, B_2|B_3, B_4)$ und $(g_1, g_2|g_3, g_4) := (A_1, A_2|A_3, A_4)$ heißt das* Doppelverhältnis *der Geraden g_1, g_2, g_3, g_4.*

2.10 Die projektive Gerade über einem Körper

Definition 2.18 *Es sei K ein Körper. Dann heißt*
a) $\mathfrak{G}_2 := \{< \vec{x} > \mid \vec{x} \in K^2, \vec{x} \neq \vec{0}\}$ homogene Darstellung *der projektiven Gerade über K.*
b) $\mathfrak{G}_1 := \{x \mid x \in K\} \cup \{\infty\}$ inhomogene Darstellung *der projektiven Gerade über K.*

Definition 2.19 *$GL(2, K) :=$ Gruppe der regulären 2×2 Matrizen über K.*
$PGL(2, K) :=$ von $GL(2, K)$ induzierte Permutationsgruppe von $\mathfrak{G}_2$.

Definition 2.20 *Die Wirkung von $\alpha \in PGL(2,K)$ mit $M_\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ auf $\mathfrak{G}_1$ ist:*

$$x \to \begin{cases} \dfrac{ax+b}{cx+d}, & \textit{falls } cx+d \neq 0 \\ \infty, & \textit{falls } cx+d = 0, \end{cases} \qquad \textit{und} \qquad \infty \to \begin{cases} \dfrac{a}{c}, & \textit{falls } c \neq 0 \\ \infty, & \textit{falls } c = 0. \end{cases}$$

und heißt gebrochen lineare Abbildung

Lemma 2.30 *Die Gruppe $PGL(2,K)$ operiert* **scharf 3-fach** *transitiv auf $\mathfrak{G}_2$ bzw. $\mathfrak{G}_1$.*

Lemma 2.31 *In $\mathfrak{P}_i(K)$ ist jede Gruppe Π_{gg} von projektiven Abbildungen einer Geraden g auf sich isomorph zu $PGL(2,K)$.*

Lemma 2.32 *Ein Element $\alpha \in PGL(2,K)$ mit $M_\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist genau dann eine Involution, d.h. $\alpha^2 = id, \alpha \neq id$, wenn $a + d = 0$ ist.*

Lemma 2.33 *Vertauscht $\pi \in PGL(2,K)$ zwei Punkte, so ist π eine Involution.*

2.11 Harmonische Punkte in $\mathfrak{P}_i(K)$, Char $K \neq 2$

Definition 2.21 *Vier Punkte A, B, C, D einer Gerade g in $\mathfrak{P}_i(K)$, Char $K \neq 2$, heißen* harmonisch, *wenn $(A, B|C, D) = -1$ ist. Bezeichng.: $H(A, B; C, D)$*

Lemma 2.34 *Aus $H(A, B; C, D)$ folgt $H(A, B; D, C)$, $H(C, D; A, B)$.*

Lemma 2.35 *Es gilt $H(A, B; C, D)$ genau dann, wenn es zu jeder Gerade $a \neq A \vee B$ durch C eine involutorische Zentralkollineation σ mit Achse a durch C und Zentrum D gibt, die A und B vertauscht.*

Lemma 2.36 *Aus $H(A, B; C, D)$ folgt: Es gibt* **genau eine** *Involution π in $\Pi_{gg}, g = A \vee B$, mit $\pi(A) = B, \pi(B) = A, \pi(C) = C, \pi(D) = D$.*

Lemma 2.37 *In $\mathfrak{P}_i(K)$ sind vier Punkte A, B, C, D einer Gerade g genau dann in harmonischer Lage, wenn es ein Viereck P_1, P_2, P_3, P_4 gibt, so dass*
$A = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_3 \vee P_4)$, $B = (P_2 \vee P_3) \wedge (P_4 \vee P_1)$, $C = (P_1 \vee P_3) \wedge g$, $D = (P_2 \vee P_4) \wedge g$.

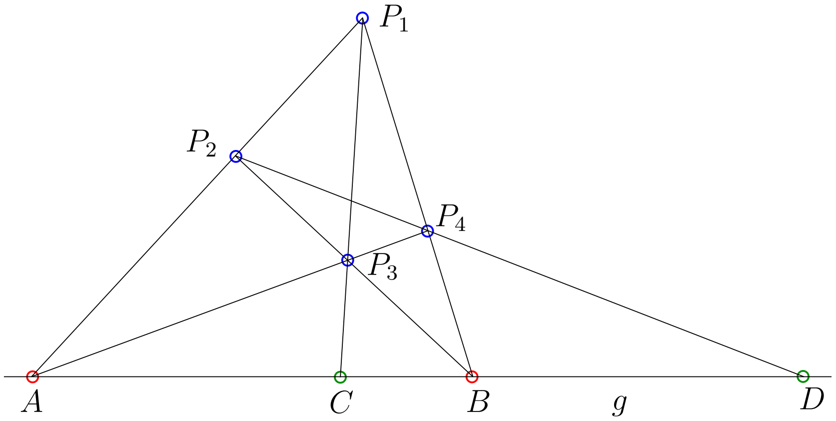


Abbildung 6: Harmonische Punkte

3 Kegelschnitte in pappusschen projektiven Ebenen

3.1 Definition eines nicht ausgearteten Kegelschnitts

Definition 3.1 *Es sei K ein Körper. In $\mathfrak{P}_2(K)$ sei*
$k_1 := \{< (x_1, x_2, x_3)^\top > \mid x_1 x_2 = x_3^2\}$.
(In $\mathfrak{P}_1(K)$ ist k_1: $\{\binom{x}{y} \mid y = \frac{1}{x}, x \neq 0\} \cup \{(0), (\infty)\}$.)
Jedes Bild von k_1 unter einer Kollineation von $\mathfrak{P}_2(K)$ heißt nicht ausgearteter Kegelschnitt.

Definition 3.2 $k_2 := \{< (x_1, x_2, x_3)^\top > \mid x_2 x_3 = x_1^2\}$.
In $\mathfrak{P}_1(K)$ ist k_2: $\{\binom{x}{y} \mid y = x^2\} \cup \{(0)\}$.

Lemma 3.1 *Die n.a. Kegelschnitte in $\mathfrak{P}_i(K)$ sind* **projektiv** *äquivalent zu k_1 (oder k_2). (D.h., sie sind durch eine projektive Kollineation ineinander überführbar.)*

Lemma 3.2 *Die projektiven Kollineationen in $\mathfrak{P}_1(K)$ mit*
a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ax+b \\ a^2y + 2abx + b^2 \end{pmatrix}, a \neq 0$ *b)* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x/y \\ 1/y \end{pmatrix}$
bilden $k_2 = \{\binom{x}{y} \mid y = x^2\} \cup \{(\infty)\}$ auf sich ab.

Lemma 3.3 *Es sei k ein n.a. Kegelschnitt (in $\mathfrak{P}_i(K)$).*
a) Die Gruppe Π_k der projektiven Kollineationen, die k invariant lassen, operiert auf der Punktmenge k 3-fach transitiv.
b) Eine Gerade g hat mit k entweder keinen Punkt oder einen Punkt oder zwei Punkte gemeinsam. Im ersten Fall heißt g Passante *im zweiten Fall* Tangente *und im dritten Fall* Sekante.
In jedem Punkt von k gibt es genau eine Tangente.

Lemma 3.4 *a) Ein n.a. Kegelschnitt k in $\mathfrak{P}_1(K)$ mit $(0), (\infty), (1,1) \in k$ und (0,0) ist der Schnittpunkt der Tangenten in (0) und (∞), ist der Kegelschnitt k_1.*
b) Ein n.a. Kegelschnitt k in $\mathfrak{P}_1(K)$ mit $(\infty), (0,0), (1,1) \in k$ und (0) Schnittpunkt der Tangenten in $(0,0)$ bzw. (∞) ist k_2.
c) Ein n.a. Kegelschnitt ist durch 3 Punkte und die Tangenten in 2 Punkten davon eindeutig bestimmt.
d) Π_k operiert **scharf** *3-fach transitiv.*

3.2 Ovale

Definition 3.3 *Eine Punktmenge $\mathfrak{o}$ in einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ heißt* Oval, *wenn*
(1) eine beliebige Gerade mit $\mathfrak{o}$ höchstens 2 Punkte gemeinsam hat,
(2) in jedem Punkt $P \in \mathfrak{o}$ genau eine Tangente (Gerade g mit $g| \cap \mathfrak{o}| = 1$) existiert.

Lemma 3.5 *Ein n.a. Kegelschnitt ist ein Oval.*

Lemma 3.6 *Für ein Oval $\mathfrak{o}$ in einer endlichen projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ der Ordnung n (d.h.: jede Gerade hat $n+1$ Punkte) gilt:*
a) $|\mathfrak{o}| = n + 1$.
b) Falls n **ungerade** *ist, gehen durch jeden Punkt keine oder 2 Tangenten.*
c) Falls n **gerade** *ist, gehen alle Tangenten durch einen Punkt N, den* Knoten *von $\mathfrak{o}$.*

Lemma 3.7 *Im Fall* $\mathrm{Char} K = 2$ *hat ein n.a. Kegelschnitt einen Knoten, d.h. alle Tangenten gehen durch einen Punkt.*

Lemma 3.8 *Ein Oval* $\mathfrak{o}$ *in einer projektiven Ebene* $\mathfrak{P}$ *ist genau dann ein n.a. Kegelschnitt, wenn es zu jedem Punkt* $P \notin \mathfrak{o}$ *einer Sekante* s *eine involutorische Zentralkollineation* σ_P *gibt, die* $\mathfrak{o}$ *invariant lässt und* P *als Zentrum hat.*

Lemma 3.9 *(Hyperbelviereck)*
Es sei K *ein Körper und* $P_i = (x_i, y_i)$, *i=1,...4, vier Punkte der affinen Ebene* $\mathbf{A}(K)$ *mit* $x_i \neq x_k, y_i \neq y_k$ *für* $i \neq k$. *Dann gilt:*
P_1, P_2, P_3, P_4 *liegen genau dann auf einer Hyperbel* $y = \frac{a}{x-b} + c$, *wenn keine* 3 *kollinar liegen und*

$$\frac{(y_4 - y_1)(x_4 - x_2)}{(x_4 - x_1)(y_4 - y_2)} = \frac{(y_3 - y_1)(x_3 - x_2)}{(x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}$$

ist.

3.3 Der Satz von PASCAL und seine Ausartungen

Satz 3.10 *(PASCAL)*
Es sei $\mathfrak{o}$ *ein Oval in einer pappusschen projektiven Ebene* $\mathfrak{P}$ $(\mathfrak{P}_i(K))$. $\mathfrak{o}$ *ist genau dann ein n.a. Kegelschnitt, wenn gilt:*
Ist $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ *ein beliebiges Sechseck auf* $\mathfrak{o}$, *so sind die Punkte*
$P_7 := (P_1 \vee P_5) \wedge (P_2 \vee P_4)$, $\quad P_8 := (P_1 \vee P_6) \wedge (P_3 \vee P_4)$, $\quad P_9 := (P_2 \vee P_5) \wedge (P_3 \vee P_5)$
kollinear.

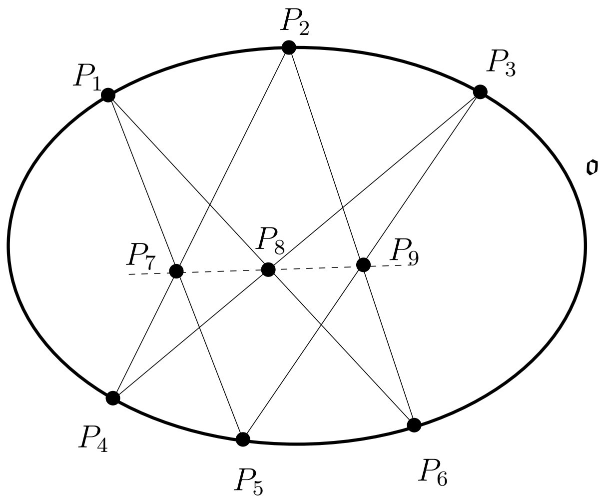


Abbildung 7: 6-Punkte-PASCAL-Satz

Lemma 3.11 *(Parabelviereck)*
Es sei K *ein Körper und* $P_i = (x_i, y_i)$, *i=1,...4, vier Punkte der affinen Ebene* $\mathbf{A}(K)$ *mit* $x_i \neq x_k$ *für* $i \neq k$. *Dann gilt:*
P_1, P_2, P_3, P_4 *liegen genau dann auf einer Parabel* $y = ax^2 + bx + c$, *wenn keine* 3 *kollinar liegen und*

$$\frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} - \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

ist.

Satz 3.12 *(5-Punkte PASCAL)*
Es sei $\mathfrak{o}$ *ein Oval in einer pappusschen projektiven Ebene* $\mathfrak{P}$ $(\mathfrak{P}_i(K))$. $\mathfrak{o}$ *ist genau dann ein n.a. Kegelschnitt, wenn gilt:*
Ist P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 *ein beliebiges Fünfeck auf* $\mathfrak{o}$ *und sei* $P_1 \vee P_1$ *die Tangente in* P_1*, so sind die Punkte*
$P_6 := (P_1 \vee P_1) \wedge (P_2 \vee P_4), \quad P_7 := (P_1 \vee P_5) \wedge (P_3 \vee P_4), \quad P_8 := (P_2 \vee P_5) \wedge (P_3 \vee P_1)$
kollinear.

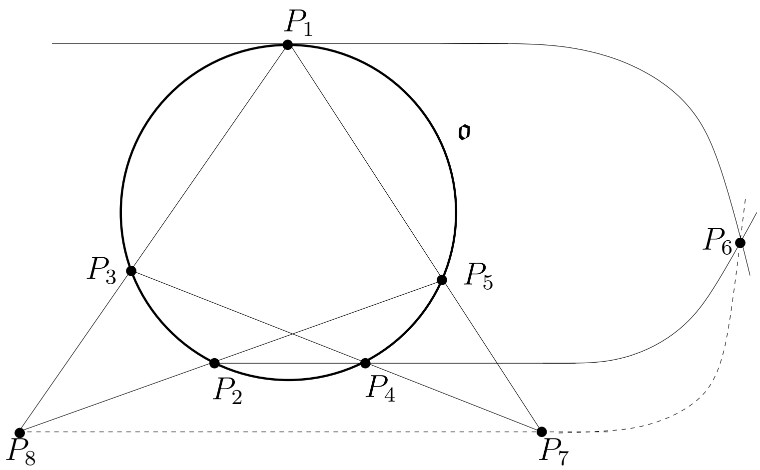


Abbildung 8: 5-Punkte–PASCAL

Satz 3.13 *(4-Punkte PASCAL)*
Es sei $\mathfrak{o}$ *ein Oval in einer pappusschen projektiven Ebene* $\mathfrak{P}$. $\mathfrak{o}$ *ist genau dann ein n.a. Kegelschnitt, wenn gilt:*
Ist $P_1, ..., P_4$ *ein beliebiges Viereck auf* $\mathfrak{o}$ *und ist* $P_1 \vee P_1$ *bzw.* $P_2 \vee P_2$ *die Tangente an* $\mathfrak{o}$ *in* P_1 *bzw.* P_2*, so sind die Punkte*
$P_5 := (P_1 \vee P_1) \wedge (P_2 \vee P_2), \quad P_6 := (P_1 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4), \quad P_7 := (P_1 \vee P_4) \wedge (P_2 \vee P_3)$
kollinear.

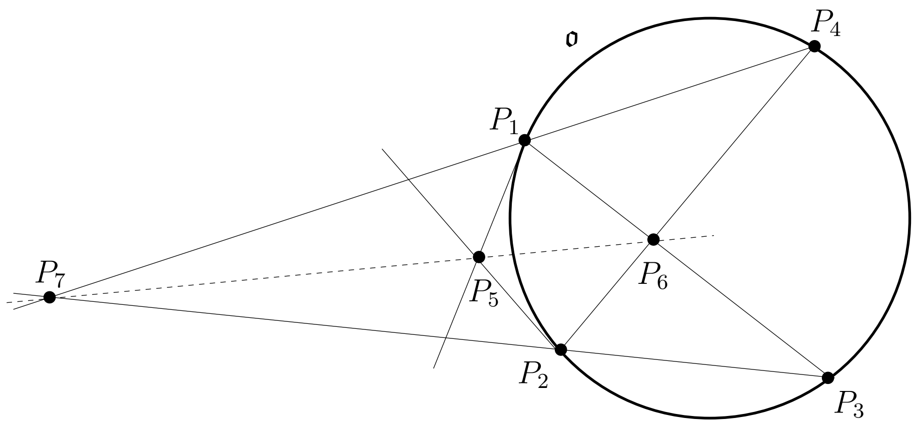


Abbildung 9: 4-Punkte-PASCAL

Bemerkung: Der 4–Punkte–PASCAL eignet sich hervorragend zur punktweisen Konstruktion einer Hyperbel bzw. Parabel.

Satz 3.14 *(3-Punkte PASCAL)*
Es sei $\mathfrak{o}$ ein Oval in einer pappusschen projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ über einem Körper der Char $\neq$ 2 . $\mathfrak{o}$ ist genau dann ein n.a. Kegelschnitt, wenn gilt:
Ist P_1, P_2, P_3 ein beliebiges Dreieck auf $\mathfrak{o}$ und ist $P_i \vee P_i$ die Tangente an $\mathfrak{o}$ in P_i, so sind die Punkte
$P_4 := (P_1 \vee P_1) \wedge (P_2 \vee P_3)$, $\quad P_5 := (P_2 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee P_3)$, $\quad P_6 := (P_3 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$
kollinear.

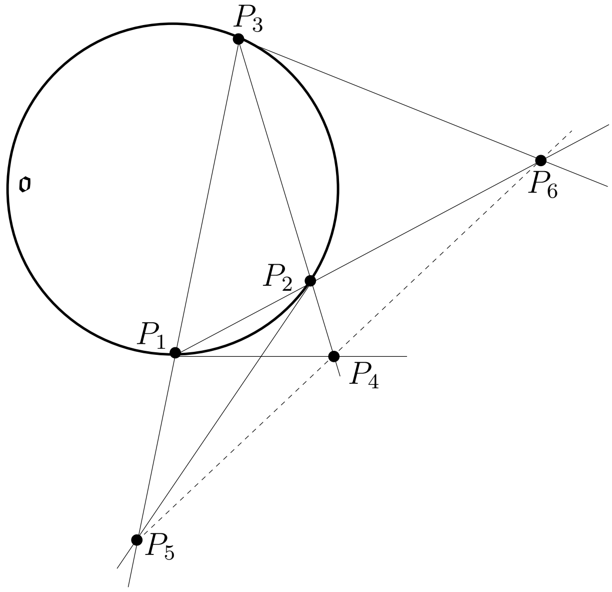


Abbildung 10: 3-Punkte-PASCAL

Satz 3.15 *(Perspektive Dreiecke)*
Es sei $\mathfrak{o}$ ein Oval in einer pappusschen projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ über einem Körper der Char $\neq$ 2 . $\mathfrak{o}$ ist genau dann ein n.a. Kegelschnitt, wenn gilt:
Ist P_1, P_2, P_3 ein beliebiges Dreieck auf $\mathfrak{o}$ und ist t_i die Tangente an $\mathfrak{o}$ in P_i, so sind die Punkte $\quad Q_1 := t_2 \wedge t_3$, $\quad Q_2 := t_3 \wedge t_1$, $\quad Q_3 := t_1 \wedge t_2$
nicht kollinear und die Geraden $P_i \vee Q_i, i = 1, 2, 3$, kopunktal. (D.h. das Dreieck P_1, P_2, P_3 liegt zu dem Dreieck Q_1, Q_2, Q_3 perspektiv.)

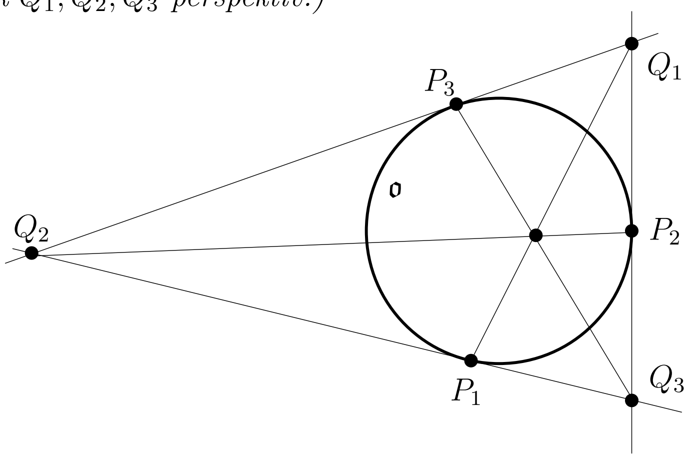


Abbildung 11: perspektive Dreiecke

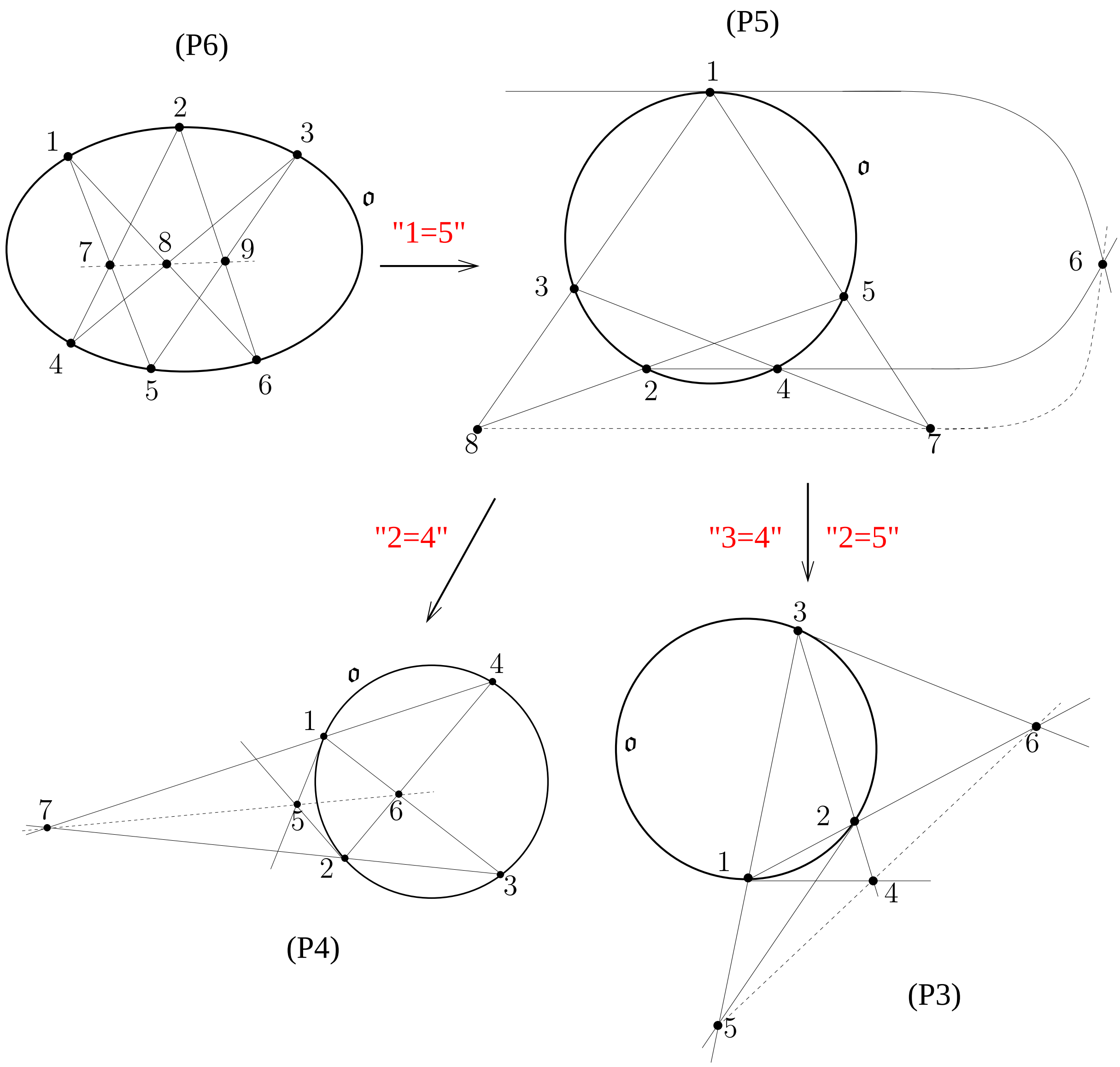


Abbildung 12: Beziehungen zwischen den PASCAL-Ausartungen

3.4 Satz von SEGRE, Satz von STEINER

Satz 3.16 *(SEGRE)*
Es sei $\mathfrak{P}$ *eine pappussche projektive Ebene* **ungerader Ordnung**. *Es gilt:* **Jedes Oval** *in* $\mathfrak{P}$ *ist ein n.a.* **Kegelschnitt**.

Satz 3.17 *(STEINER)*
Es sei $\mathfrak{P}$ *eine pappussche projektive Ebene,* U, V *zwei Punkte und* $B(U)$ *bzw.* $B(V)$ *das Geradenbüschel in* U *bzw.* V*,* π *sei eine Bijektion von* $B(U)$ *auf* $B(V)$ *mit*
$\pi(U \vee V) \neq U \vee V$.
$\mathfrak{o} := \{g \cap \pi(g) \mid g \in B(U)\}$ *ist genau dann ein n.a. Kegelschnitt, wenn gilt:*
π *ist eine projektive, aber nicht perspektive, Abbildung von* $B(U)$ *auf* $B(V)$.

4 Projektive Räume

4.1 Projektiver Raum über einem Körper

Definition 4.1 *Es sei K ein Körper und $V(K)$ ein Vektorraum über K. Ist $\vec{0} \neq \vec{p} \in V(K)$ so heißt $< \vec{p} > := \{\lambda\vec{p} \mid \lambda \in K\}$ (1-dim. Unterraum)* **Punkt**.
Sind $P_i =< \vec{p_i} >, i = 1, ..., m$ Punkte, so heißt
$< \vec{p_1}, ..., \vec{p_m} > := \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\vec{p_i} \mid \lambda_i \in K\}$
der von $P_1, ...P_m$ aufgespannte **projektive Unterraum**. *Sind $\vec{p_1}, ..., \vec{p_m}$ linear unabhängig, so heißt $m-1$ die* Dimension *von $< \vec{p_1}, ..., \vec{p_m} >$.*
Ist $\mathbf{U}_i :=$ Menge der i-dimensionalen projektiven Unterräume, so heißt die Struktur $\mathfrak{P} := (\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, ..., \subset)$ **projektiver Raum**.
$\mathbf{U}_0$ ist die Menge der Punkte, $\mathbf{U}_1$ die Menge der Geraden.
Ist $V = K^{n+1}$, so heißt n die Dimension *von $\mathfrak{P}$.*
Bez.: $\mathfrak{P}^n(K)$ proj. Raum über K.

Bemerkung: Es lassen sich auch projektive Räume über *Schiefkörper* definieren.

4.2 Definition eines projektiven Raumes

Grundlegende Inzidenzeigenschaften von $\mathfrak{P}^n(K)$:

PR1: Zu zwei Punkten P, Q gibt es genau eine Gerade g mit $P, Q \; I \; g$.

PR2: (VEBLEN–YOUNG–Axiom) Sind A, B, C, D vier Punkte so, dass die Geraden $A \vee B$, $C \vee D$ sich schneiden, so schneiden sich auch $A \vee C$, $B \vee D$.

PR3: Jede Gerade inzidiert mit wenigstens 3 Punkten. Es gibt wenigstens 2 verschiedene Geraden.

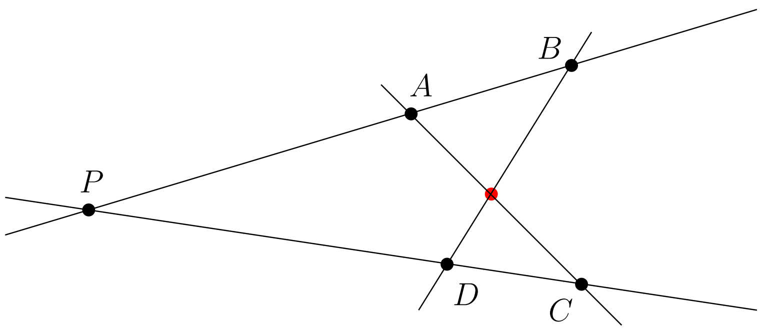


Abbildung 13: Veblen–Young–Axiom

Definition 4.2 *Eine Inzidenzstruktur $\mathfrak{P} := (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ mit den Eigenschaften* **PR1**–**PR3** *heißt* projektiver Raum.

Zum Aufbau eines projektiven Raumes aus den obigen Axiomen: s. *Beutelspacher/Rosenbaum*

5 Quadriken in projektiven Räumen

5.1 Definition einer Quadrik

Definition 5.1 *Es sei K ein Körper, V ein Vektorraum über K.*
Eine Abbildung ρ von V in K mit
(Q1:) $\rho(\lambda\vec{x}) = \lambda^2\rho(\vec{x})$ für $\lambda \in K,\ \vec{x} \in V$.
(Q2:) $f(\vec{x},\vec{y}) := \rho(\vec{x}+\vec{y}) - \rho(\vec{x}) - \rho(\vec{y})$ ist eine Bilinearform.
heißt quadratische Form.

Definition 5.2 *a) Es sei ρ eine quadratische Form in K^{n+1} und f die zugehörige Bilinearform. $\mathfrak{Q}_\rho := \{<\vec{x}> \mid \vec{x} \neq \vec{0}, \rho(\vec{x}) = 0\}$ heißt* Quadrik *in $\mathfrak{P}^n(K)$.*
b) Ist $P = <\vec{p}>$ ein Punkt in $\mathfrak{P}^n(K)$, so heißt
$P^\perp := \{<\vec{x}> \in \mathbf{P} \mid f(\vec{p},\vec{x}) = 0\}$ Polarraum *von P.*

Lemma 5.1 *In $\mathfrak{P}^n(K)$ sei g eine Gerade und $\mathfrak{Q}_\rho$ eine Quadrik. Es gilt entweder*
a) $g \cap \mathfrak{Q}_\rho = \emptyset$ und g heißt Passante *oder*
b) $g \subset \mathfrak{Q}_\rho$ und g heißt Tangente *oder*
c) $|g \cap \mathfrak{Q}_\rho| = 1$ und g heißt Tangente *oder*
d) $|g \cap \mathfrak{Q}_\rho| = 2$ und g heißt Sekante.

Lemma 5.2 *Ist $P \in \mathfrak{Q}_\rho$ und g eine Gerade durch P, so gilt:*
g ist genau dann eine Tangente (an $\mathfrak{Q}_\rho$), wenn $g \subset P^\perp$.

5.2 f–Radikal und singuläres Radikal einer Quadrik

Lemma 5.3 *a) $\mathfrak{R}_\rho := \{P \in \mathbf{P} \mid P^\perp = \mathbf{P}\}$ ist ein (proj.) Unterraum.*
$\mathfrak{R}_\rho$ heißt f-Radikal *von $\mathfrak{Q}_\rho$.*
b) $\mathfrak{S}_\rho := \mathfrak{R}_\rho \cap \mathfrak{Q}_\rho$ ist ein (proj.) Unterraum.
$\mathfrak{S}_\rho$ heißt singuläres Radikal.
c) Falls Char $K \neq 2$ ist, gilt $\mathfrak{R}_\rho = \mathfrak{S}_\rho$.

Definition 5.3 *Eine Quadrik $\mathfrak{Q}_\rho$ heißt* nicht ausgeartet, *wenn $\mathfrak{S}_\rho = \emptyset$.*

5.3 Index einer Quadrik

Definition 5.4 *Ein Unterraum $\mathfrak{U}$ des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^n(K)$ heißt* ρ–Unterraum, *wenn $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{Q}_\rho$.*

Resultat 5.4 *Je zwei* maximale ρ–Unterräume *haben dieselbe Dimension.*

Definition 5.5 *Ist $\mathfrak{Q}_\rho$ eine n.a. Quadrik und ist m die (proj.) Dimension der maximalen ρ–Unterräume von $\mathfrak{Q}_\rho$, so heißt $i := m + 1$ der* **Index** *von $\mathfrak{Q}_\rho$.*

Resultat 5.5 *Für den Index i einer n.a. Quadrik in $\mathfrak{P}^n(K)$ gilt: $i \leq \frac{n+1}{2}$.*

5.4 Symmetrien einer Quadrik

Lemma 5.6 *Zu jedem Punkt $P \in \mathbf{P} \setminus (\mathfrak{Q}_\rho \cap \mathfrak{R}_\rho)$ gibt es eine involutorische Zentralkollineation σ_P mit dem Zentrum P und $\sigma(\mathfrak{Q}_\rho) = \mathfrak{Q}_\rho$.*

5.5 Quadratische Mengen

Definition 5.6 *Es sei* $\mathfrak{P}$ *ein projektiver Raum. Eine Menge* $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ *von* $\mathfrak{P}$ *heißt* quadratische Menge*, wenn gilt*

QM1: Jede Gerade g *von* $\mathfrak{P}$ *trifft* $\mathfrak{M}$ *in höchstens 2 Punkten oder ist in* $\mathfrak{M}$ *enthalten.*
g heißt Passante *bzw.* Tangente *bzw.* Sekante *, falls*
$|g \cap \mathfrak{M}| = 0$ *bzw.* $|g \cap \mathfrak{M}| = 1$ *oder* $g \subset \mathfrak{M}$ *bzw.* $|g \cap \mathfrak{M}| = 2$ *ist.*

QM2: Für jeden Punkt $P \in \mathfrak{M}$ *ist die Vereinigung* $\mathfrak{M}_P$ *aller Tangenten durch* P *eine Hyperebene oder der ganze Raum.*

Definition 5.7 *Eine Quadratische Menge* $\mathfrak{M}$ *heißt* nicht ausgeartet*, falls* $\mathfrak{M}_P$ *für jeden Punkt* P *eine Hyperebene ist.*

Resultat 5.7 (BUEKENHOUT,1969) *Es sei* $\mathfrak{P}^n$ *ein projektiver Raum der endlichen Dimension* $n \geq 3$ *und* $\mathfrak{M}$ *eine nicht ausgeartete quadratische Menge, die Geraden enthält. Dann gilt:* $\mathfrak{P}^n$ *ist pappussch und* $\mathfrak{M}$ *ist eine Quadrik vom Index* ≥ 2.

Definition 5.8 *Es sei* $\mathfrak{P}$ *ein projektiver Raum der Dimension* ≥ 2. *Eine nicht ausgeartete quadratische Menge* $\mathfrak{O}$*, die keine Geraden enthält, heißt* **Ovoid** *(oder* Oval *im ebenen Fall).*

Resultat 5.8 *a) Ist* $|K| < \infty$ *und* $\mathfrak{O}$ *ein Ovoid in* $\mathfrak{P}^n(K)$*, so ist* $n = 2$ *oder* $n = 3$.
b) Ist $|K| < \infty$ *und* $\mathfrak{O}$ *ein Ovoid in* $\mathfrak{P}^n(K)$ *und Char* $K \neq 2$*, so ist* $\mathfrak{O}$ *eine Quadrik.*

Eine formale Ausdehnung der Definition von Quadriken auf Vektorräume über echten Schiefkörpern ist nicht sinnvoll, da es dann Sekanten mit mehr als 2 Quadrikenpunkten geben würde. Der Grund ist die folgende Aussage:

Resultat 5.9 *Ein Schiefkörper* K *ist genau dann* **kommutativ***, wenn jede Gleichung* $x^2 + ax + b$, $a, b \in K$, *höchstens* **zwei** *Lösungen besitzt.*

6 Schlussbemerkung: Beweise

Die **Beweise** der meisten Aussagen über Kegelschnitte und Quadriken dieses Skriptes findet man im Skript über *Kreisgeometrien* (engl.):

`http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/circlegeom.pdf`

7 Literatur

- L. Kadison, M.T. Kromann: *Projective Geometry and modern Algebra*, Birkhäuser-Verlag, 1996
- M. Audin: *Geometry*, Springer-Verl., 2003
- A. Beutelspacher, U. Rosenbaum: *Projektive Geometrie*, Vieweg-Verlag, 2004
- H. Karzel, K. Sörensen, D. Windelberg: *Einführung in die Geometrie*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1973
- H. Lenz: *Vorlesungen über projektive Geometrie*, Akad. Verlagsgesellschaft, 1965
- P. Samuel: *Projective Geometry*, Springer-Verl. 1988