



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemáticas

MULTIVERSO

Trabajo que presenta

José Jorge Hernández Santiago

Para obtener el grado de
Licenciado en Física y Matemáticas
con especialidad en Física.

Director

Dr. Rubén Cordero Elizalde



México, D. F.

Diciembre de 2009

**A mis padres
Alma Rosa y Sergio
Por qué por su *culpa* soy lo que soy**

Un agradecimiento especial al Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico para la realización de esta tesis.

AGRADECIMIENTOS

Si bien con el paso de los años he olvidado a distinguir entre los triunfos y fracasos, etiquetándolos solo como experiencia, sin importar el color de cual pudiese teñirse, hoy tengo que reconsiderar esta tesis con un valor mayor al que comúnmente le daría en otros momentos, dicho esto, también me gustaría dar gracias a las personas que han sido relevantes en el surgimiento de esta tesis, así como del amor que hoy le tengo al conocimiento.

Gracias a mi familia, muchas gracias papá y mamá por tratar de formarme y por darme consejos y ejemplos a lo largo de mi vida, que si bien es cierto que no he seguido todos, los pocos que he tomado me han hecho llegar a ser quien son ahora. A mis hermanos Julissa y Sergio por el apoyo y la admiración que nos tenemos. A mis tíos y primos, que gracias a sus palabras y vivencias me hicieron recordar que en los peores momentos siempre se es capaz de encontrar una solución. Gracias tío Gustavo por el apoyo dado en estos años en los que te hiciste cargo de mí, no solo en lo económico sino también trataste de apoyarme con consejos y vivencias (aunque he de reconocer que nadie aprende en zapatos ajenos). A mi tío Hermilo (Milo) muchas gracias por los consejos, las palabras y las pláticas bajo el cielo nocturno en los cuales al fulgor de las copas y el perfume de la noche me hacías (y obligabas) a querer saber más, eres tu uno de los responsables de que hoy en día pueda considerarme un amante del conocimiento.

A mis amigos que siempre han estado ahí para apoyarme en las buenas y en las malas de manera incondicional, gracias mi hermano Jêreth por compartir las locuras que solo los soñadores y los locos podrían disfrutar de la manera que en que los dos lo hacemos. Pogo (Wonda Boy/Abisai Suarez) gracias por tratar de mostrarme otras perspectivas de la vida y por mostrarme que no hay pecado en la extravagancia. Al buen Leo gracias por compartir gustos que quizás con nadie más comparto, por tu forma de ser tan sutil e incluso por tus traumas. Mai (Omar/Wolfe) gracias por estar ahí cuando se te necesita y por romper poco a poco el silencio de tu seriedad, al igual que por tu humor tan peculiar. Liz muchas gracias por estar a mi lado, por aguantarme y tenerme paciencia aun cuando yo no la he tenido, por tratar de cobijarme en los días fríos y oscuros de mi vida y por no dejarme caer. A Arlene por ser una de las personas que ha creído en mí desde el comienzo y que hoy en día sigue apoyándome, gracias mi hermanita. A los chundos por todo su apoyo y por mostrarme nuevos horizontes cuando mi vida era tan cuadrada, gracias a todos y cada uno de ustedes, Carlitos, Mónica, Malena, Diana, Brenda, Fany, Paquito y Dafne.

A Emigdio Salazar, por tratar darme una formación como hombre de ciencias en mis primeros años en la carrera, por sus consejos y las experiencias compartidas, por tratar de inculcarme una visión de justicia y deber más allá de los fines personales, muchas gracias. A los Rockies (Marco, Rocha y el Rock) gracias por ayudarme, por mostrarme otros caminos que sin ustedes quizás no podría haber conocido, por motivarme a ser un poco más insurrecto y menos alineado. Gracias Chio por las pláticas, los consejos, al igual que las mini asesorías en las cuales reíamos tanto e incluso sacábamos nuestros traumas.

A mi asesor Rubén Cordero Elizalde muchas gracias por las oportunidades que me has dado, por confiar en alguien muy joven y escuchar sus calamidades, sus ideas sin sentido y hasta sus sueños, por usar parte de tu tiempo (el cual no te sobra) para compartir unas palabras con este intento de cosmólogo, gracias también a Paco Turrubiates por las enseñanzas y los consejos. A mis sinodales Rebeca Juárez, Víctor Granados, Alfonso Martínez, Jaime Avendaño y Rubén Cordero, por el apoyo y la motivación dada en cada entrevista, por los conocimientos adquiridos en cada una de las pláticas y clases que a lo largo de los años recibí de cada uno de ustedes, al igual que la orientación y el apoyo en las distintas situaciones de la

vida de este estudiante.

Finalmente me gustaría darle gracias al viejo y a otra persona importante, gracias Damien por estar a mi lado cuando te lo pedí, por tu masoquismo nato que me permitió seguir adelante con pies descalzos en caminos de brazas y espinas, por hacerme abrir los ojos cada día aun fuesen los más grises y por tu extremo apoyo en aquellas noche donde la cafeína y la soledad nos mantenían despiertos.

José Jorge Hernández Santiago (Loco, Masoquista y Físico)

Nota al lector. Hola querido lector, si estás leyendo esto es porque acabas de abrir esta tesis que ha llamado tu atención, y la pregunta que quizá viene a tu mente es: ¿Qué es el multiverso?. La respuesta a esta pregunta requiere de una mente abierta a las posibilidades, en las cuales encontraras violaciones a las leyes físicas que son permitidas por la física misma, tu sentido del ego ya no será el mismo cuando termines de leer esta tesis. Quizás te sientas como Alicia, cayendo por el agujero de conejo, flotando en el abismo con la sensación de incertidumbre. Ahora querido lector, tendrás que tomar una decisión: Cerrar este libro, la historia se termina, sigues con tu vida como si nada, pensando en que no existen los universos paralelos, que la teoría de multiverso solo es ficción y que eres un ser único; Continúa leyendo hasta el final, y prometo mostrarte que tan profundo es el agujero de conejo.

RESUMEN

La idea de la existencia de universos distintos al nuestro es quizás una de las ideas más discriminadas de la ciencia. Sin embargo, hoy en día la predicción de la existencia de otros universos alternos al nuestro nace de nuestros modelos físicos aceptados como lo son: Inflación, mecánica cuántica, física estadística, teoría de cuerdas, etc. Todos estos modelos reciben el nombre genérico de multiverso, y se pueden dividir en niveles de acuerdo con la teoría que los sustente o que los prediga. Existen cuatro de estos niveles ligados cada uno a una o más teorías físicas distintas [1]. En esta tesis se hace una revisión a los modelos de inflación eterna y caótica y a la interpretación de Everett de la mecánica cuántica. Además, basados en cosmología cuántica y modelos de universos branas, se toma un modelo de nucleación de universos y se estudia la probabilidad de nucleación para distintos parámetros que caracterizan al modelo.



Figura 1: El físico y su lechuga (©Joaquín Salvador Lavado (QUINO))

Índice general

Índice general	XI
INTRODUCCIÓN	1
1. EL UNIVERSO TEMPRANO E INFLACIÓN	7
1.1. Problemas del escenario de la gran explosión caliente	7
1.1.1. El problema de la planicidad	7
1.1.2. Problema del horizonte	9
1.1.3. Problema de monopolos	10
1.2. La solución de Inflación	12
1.2.1. ¿Cómo resuelve inflación el problema de la planicidad?	13
1.2.2. ¿Cómo resuelve inflación el problema del horizonte?	14
1.2.3. ¿Cómo resuelve inflación el problema del monopolos?	15
1.3. Física de la inflación	15
1.4. Mecanismos de inflación eterna	19
1.4.1. Nueva inflación eterna	19
1.4.2. Inflación caótica eterna	20
1.4.3. ¿Podrían ser las cosas más curiosas?	23
1.5. Paisaje de cuerdas (Landscape)	23
1.6. El problema de la medida	26
2. COSMOLOGÍA CUÁNTICA	29
2.1. La ecuación de Wheeler-DeWitt	29
2.2. Cosmogénesis cuántica y la creación del universo de la nada	31
2.3. Introducción a universos brana	32
2.4. Descomposición ADM del modelo	32
2.5. Tensor Primordial	34
2.6. Constricciones canónicas	34
2.7. Ecuación de Wheeler-DeWitt	35
2.8. Razón de nucleación	36
3. NIVELES DE MULTIVERSO	43
3.1. Nivel I (Multiverso de configuraciones idénticas)	43
3.1.1. ¿Cómo serían los multiversos nivel I?	45
3.2. Multiverso nivel II (multiverso de burbujas post inflacionarias)	45
3.2.1. ¿Cómo serían los multiversos nivel II?	47
3.3. Multiverso nivel III (multiverso tipo cuántico)	48
3.3.1. Mecánica cuántica	48
3.3.2. Teoría cuántica de la medida	48
3.3.3. Regresión infinita	49
3.3.4. Cambiando las reglas	50
3.3.5. La teoría de la función universal de onda	51
3.3.6. ¿Cómo serían los multiversos nivel III?	54

3.3.7. El hubiera sí existe	55
3.4. Multiverso nivel IV (multiverso matemático)	56
CONCLUSIONES	59
APÉNDICES	61
Apéndice I: Breve resumen de la cosmología estandar	61
Apéndice II: Teoría de embebimiento	63
Apéndice III: Matriz Ψ	63
Apéndice IV: Aparato matemático de la teoría de Everett	64

INTRODUCCIÓN

Se ha puesto a pensar en la existencia de alguien más como usted, con los mismos rasgos físicos que usted, la misma familia, el mismo trabajo, pero con la única diferencia de que ha decidido no leer esta tesis.

Si bien la teoría de los universos paralelos ha sido una idea que de manera popular se adjunta casi de manera inmediata a las ideas que sólo pueden ser vistas como ciencia ficción, hoy en día existen modelos físicos que nos llevan a resultados que se interpretan como modelos multiversales [1-4]. Sentémonos un momento a pensar si nuestro universo entero no es más que sólo una pequeña isla que flota en un inmenso océano de posibles universos, realidades y hasta incluso leyes de la física distintas a las que conocemos. Si bien la idea puede parecer extraña o hasta loca, hoy en día científicos de alto calibre han tomado esta idea como una posibilidad real, sobre la cual se realiza investigación seria [5-28]. Hagamos un poco de memoria y echemos un breve vistazo a la historia de la cosmología y la evolución de las ideas de cómo es el universo a través de la historia hasta el siglo pasado.

Una breve historia sobre las ideas del hombre acerca del universo

Como se mencionó antes, las ideas acerca del universo han evolucionado desde los tiempos antiguos, dejando de lado las ideas mitológicas, tenemos en primer lugar a la idea del cosmos desarrollada por Tolomeo de Alejandría, su modelo residía en la creencia firme de que la tierra estaba en el centro del universo con el sol y la luna circundándola al igual que las estrellas, las cuales estaban a lo lejos, todos moviéndose en una combinación de complejos movimientos circulares. Este modelo tenía grandes dificultades para explicar el movimiento de los planetas, especialmente el movimiento retrogrado, cuando los planetas aparentan un retroceso en su dirección de movimiento.

Sin embargo, no fue sino hasta el siglo XVI cuando Copérnico cambió el punto de vista y nos mostró una perspectiva diferente al modelo tolemaico, haciendo residir al sol en el centro del universo, y los planetas al igual que las estrellas le circundaban; atribuyéndoles a los planetas distintas velocidades de transición alrededor del sol podía explicar el movimiento retrogrado de los planetas.

Con la teoría de la gravedad de Newton se pusieron en tierra firme las ideas empíricas de las órbitas elípticas descubiertas por Kepler. Por otra parte, las creencias de Newton apuntaban a que el universo debía de ser estático, en el cual las estrellas tuviesen una configuración fija, sin embargo, esta configuración nos lleva a un universo inestable.

En los 200 años posteriores se comprendió que las estrellas cercanas no estaban distribuidas de manera arbitraria, sino que estaban localizadas en una formación de disco que se conoció como la vía láctea. A finales del siglo XVIII fueron los Herschels quienes se encargaron de identificar la estructura de disco [29]. Sin embargo, sus mediciones no fueron muy precisas, por lo cual colocaron a nuestro sistema solar en el centro del disco; no fue sino a principios del siglo XX cuando Shapley dió evidencia convincente de que el sistema solar no se encontraba en el centro de la vía láctea sino a $2/3$.

Notemos que hasta este punto la idea que se tenía acerca del universo era demasiado cómoda, siendo solamente nuestro sistema solar y un puñado de miles de estrellas dispuestas en una configuración en

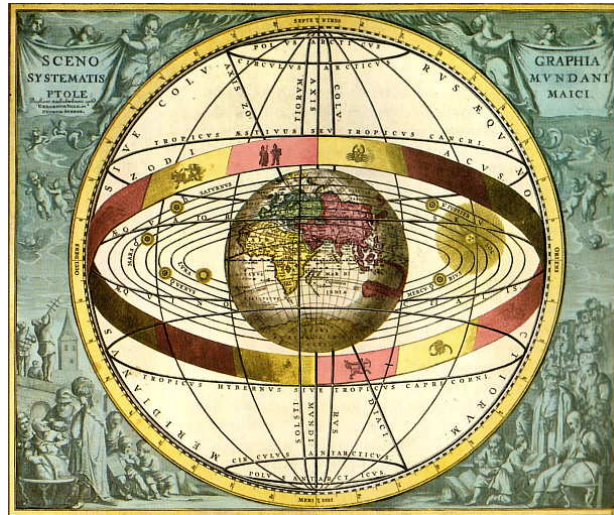


Figura 2: Modelo geocéntrico o Tolomeico

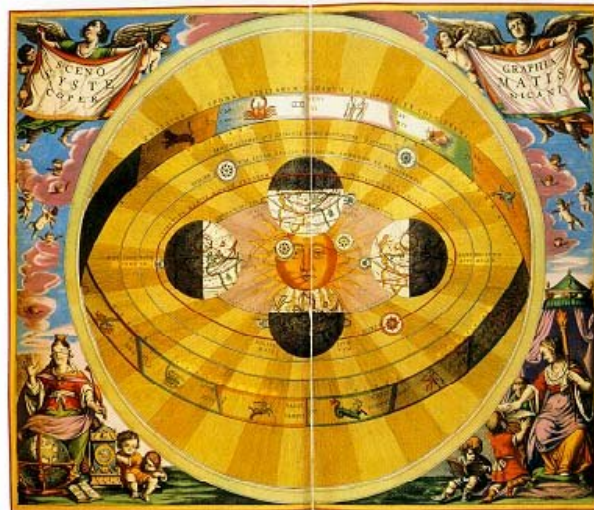


Figura 3: Modelo heliocéntrico o de Copérnico

forma de disco.

A mediados del siglo XVIII Emmanuel Kant planteó la idea de que nuestro universo podría ser sólo una pequeña isla que flotaba en un inmenso océano en el cual se encontraban más universos como el nuestro, los cuales llamó universos isla. En 1917, Hebert Curtis había observado la nova S Andromedae, en la nebulosa de Messier M31. Buscando en los registros fotográficos, encontró otras 11 novas y observó que, en promedio, estas novas eran 10 órdenes de magnitud más débiles que las ocurridas en nuestra galaxia. Como resultado de esta observación pudo predecir que dichas novas se debían encontrar a una distancia de 150.000 pársecs (1 Pársec ó 1 pc= 3.2616 aos luz = 3.0857×10^{16} m). Hebert se convirtió en un célebre defensor de la hipótesis de universos isla, que sostenía que las nebulosas espirales eran realmente galaxias independientes. En 1920 ocurrió el gran debate entre Harlow Shapley y Heber Curtis, en torno a la naturaleza de nuestra galaxia, las nebulosas espirales y la dimensión del universo. Para defender la afirmación de que M31 era una galaxia externa, Curtis argumentaba que las líneas oscuras observadas en dicha nebulosa eran similares a las nubes de polvo que se observan en nuestra galaxia.

También argumentó el marcado corrimiento Doppler. El tema fue zanjado de manera definitiva por Edwin Hubble en el año de 1923. Usar un nuevo telescopio le permitió a Hubble resolver las partes



Figura 4: Estructura en forma de disco

exteriores de algunas nebulosas espirales como colecciones de estrellas individuales. Más aún, Hubble pudo identificar en esas estrellas algunas cefeidas variables y éstas le permitieron estimar la distancia a dichas nebulosas: estaban demasiado alejadas para ser parte de la Vía Láctea, dando así prueba de que los universos isla planteados por Kant existían.

En 1952, Baade demostró que la vía láctea es una galaxia típica, dando el punto de vista moderno del principio cosmológico que nos dice que el universo a gran escala se ve igual desde cualquier punto.

Notemos entonces que dentro de la historia del hombre hemos pasado por muchas concepciones distintas de cómo es el universo, entre las cuales resaltan nuestro ego como especie así como nuestra propia ingenuidad de las cosas por no poder ver de manera evidente o incluso contradiciendo el sentido común. Hemos movido el centro del universo de nuestro planeta a nuestro sol, de nuestro sol al centro de nuestra galaxia, y del centro de nuestra galaxia a ningún punto en particular, entonces lo único en especial que nos queda dentro de un marco cosmológico es quizá nosotros mismos. El hecho de ser únicos y de que no hay ser alguno que sea igual a nosotros en todo aspecto ¿o sí? es una idea muy valiosa. Dejemos pendiente este razonamiento hasta después de terminar la siguiente sección.

Algunas ideas del multiverso

La idea del multiverso no es algo nuevo, existe en realidad desde Anaximandro hasta David Lewis [30], ambos filósofos se llegaron a topar con esta idea eventualmente. Pero el interés especial con que emerge hoy en día es que aparece de manera natural de algunos de nuestras mejores (pero también más especulativas) teorías físicas [1,31-33]. *El multiverso ya no es más un modelo, es una consecuencia de nuestros modelos*. Nos ofrece un entendimiento obvio de la extrañeza del estado físico de nuestro universo. La propuesta es atractiva y creíble pero se necesita un profundo replanteamiento de lo que sabemos acerca de la física y del universo como tal, como fue necesario para aceptar que no somos el centro del universo.

Sin embargo, la primer reacción que llegamos a tener sobre el multiverso es la de tomarlo como una broma, algo que quizá hemos sacado de alguna historieta de superhéroes o alguna película de los hermanos Wachowski, y que a nuestro parecer debería quedarse ahí ya que no hemos podido encontrar evidencia observacional de estos. Pero ahora pensemos como habitantes de la tierra de hace 200 años sí alguien nos dijera que podríamos viajar por las profundidades del mar, que podríamos hacer que moles de acero y materiales mucho más densos que el aire pudiese volar, que no habría necesidad de plumas para ello, y que incluso podríamos llegar a la luna, quizás nos tomarían por lunáticos y nos prohibirían seguir leyendo a Julio Verne. Si hubiese sido unos 4 o 5 siglos antes nos hubiesen llamado herejes y quizás nuestras

calamidades no sólo las hubiéramos pagado con rechazo de nuestra sociedad hacia nosotros, sino quizá, con nuestra propia vida.

La humanidad en si tiene un largo historial de rechazo al cambio, quizá tenemos la tendencia de sentirnos cómodos en la ignorancia de ciertas cosas, y cuando ésta necesita ser saciada recurrimos a entes fantásticos que nos den la respuesta, creamos dioses, de la lluvia, del maíz, del fuego, . . . entre MUCHOS otros, a los cuales atribuimos las cosas que no entendemos. Sin embargo, hay personas que son motivadas por otra de las grandes cualidades del ser humano, la curiosidad, y es este mismo impulso el que nos motiva a preguntarnos el cómo e incluso el por qué. Notamos que aquellas cosas que parecían inexplicables lo son, ahora sabemos sobre los ciclos naturales, la biología, la física y muchas otras ciencias la cuales nos han quitado de manera paulatina el velo de ignorancia que descansaba sobre nuestros sentidos. El hecho de que no veamos un átomo a simple vista no significa que no esté ahí formando estructuras tan simples como la glucosa y el metano, y moléculas más complicadas como el carbono 60 y el mismo ADN.

Pensemos en el hecho de que jamás hemos visto un quark aislado, o un monopolio magnético aislado, o el interior de un agujero negro. El modelo estándar predice que no podremos detectar quarks aislados y la teoría de la relatividad general nos prohíbe ver dentro de un agujero negro, entonces si hay teorías físicas aceptadas como el modelo estándar de las partículas elementales y relatividad general que poseen resultados que ellas mismas marcan como indetectables entonces, porque rechazaríamos una predicción inobservable de un modelo físico serio y aceptado, ¿Simplemente por qué no los vemos?!.

Veamos esta problemática desde el siguiente punto de vista. Podemos ver al multiverso como algo que reside fuera de la ciencia, sólo porque no podemos observarlo. Siguiendo con la prescripción de Karl Popper [30, 34], ¿puede una teoría negarse si no podemos observar sus predicciones? Esta forma de pensar no es del todo correcta para el multiverso por varias razones.

Primero, las predicciones que se pueden hacer en el multiverso se dejan sólo como resultados estadísticos, pero esto es también válido para cualquier otra teoría física de nuestro universo, debido tanto a las fluctuaciones cuánticas fundamentales y como a las incertidumbres de medición, que harían que cualquier teoría macroscópica pueda deducirse de resultados estadísticos microscópicos.

Segundo, nunca ha sido necesario el comprobar todas las predicciones de una teoría para considerarla como ciencia legítima. Relatividad general por ejemplo, se ha probado de manera extensiva en el mundo visible, pero no podemos ir a corroborar la teoría dentro de un agujero negro.

Finalmente, el racionalismo crítico de Popper no tiene la última palabra en la filosofía de la ciencia. Sociólogos, esteticistas y epistemólogos han mostrado que hay otros criterios de demarcación por considerar. La historia nos trae a la mente que la definición de ciencia sólo viene desde dentro y de una praxis: ningún área de la creación intelectual puede ser estrictamente delimitada desde fuera. Si los científicos necesitamos un cambio en las fronteras de nuestros campos de investigación, debería de ser difícil el justificar una prescripción filosófica que nos prohíba hacerlo. Pasó lo mismo con el arte, a principio del siglo XX las innovaciones en el arte habían transgredido la definición de arte que había sido dada por los esteticistas del siglo XIX. Al igual que la ciencia y los científicos, el arte es algo que está definido por los artistas.

Tomemos en cuenta estas razones, no sería la primer vez que la humanidad cambia su percepción sobre el lugar que ocupa, debemos considerar seriamente la posibilidad de que vivamos en un multiverso. El hecho de que la leyes físicas así como los acontecimientos que han propiciado la vida sean tan estrechos y más fundamental todavía el asumir que cantidades extremadamente improbables parecen evidentes si nuestro universo entero fuese sólo una pequeña parte de un enorme multiverso donde diferentes regiones exhiben diferentes leyes.

El multiverso no es una teoría. Aparece como una consecuencia de algunas de nuestras teorías las cuales poseen otras predicciones que pueden ser probadas en nuestro universo. Existen distintos tipos de multiversos posibles, de acuerdo con las teorías en que se basan, algunas de ellos posiblemente estén entretejidos.

¿Cómo una teoría de multiverso puede ser probada o negada?

Podríamos pensar que el multiverso es una teoría metafísica la cual hemos clasificado como física. Como se ha mencionado la postura de Karl Popper es acerca del hecho de que una teoría no deja de ser cierta por el simple hecho de que contenga entes inobservables. Por ejemplo, una teoría sostiene que en 190388 universos paralelos existen sólo hidrógeno, entonces diríamos que esa teoría es una falacia porque en este universo tenemos elementos pesados.

Un ejemplo más serio, el marco de un multiverso Nivel I [4] se usa rutinariamente para evaluar las teorías de la cosmología moderna, pero rara vez se enuncia explícitamente este proceso. Por ejemplo, veamos como utilizaron los cosmólogos la radiación cósmica de fondo para descartar una geometría esférica finita. Los puntos calientes y fríos de los mapas del fondo de microondas tienen un tamaño característico que depende de la curvatura del espacio, y los observados parecen ser demasiado pequeños para corresponder a una forma esférica. Pero es importante ser estadísticamente rigurosos. El tamaño promedio de los puntos varía aleatoriamente de un volumen de Hubble al siguiente, por lo que es posible que nuestro universo nos esté engañando: podría ser esférico, pero con puntos anormalmente pequeños. Cuando los cosmólogos afirman haber descartado el modelo esférico con una certidumbre del 99.9%, en realidad quieren decir que si este modelo fuera cierto, menos de uno de cada 1000 volúmenes de Hubble presentaría puntos tan pequeños como los que observamos.

Dentro de esta tesis se explicarán de manera general los modelos que han dado origen a cada uno de los modelos de multiverso, los cuales han clasificado como niveles (del 1 al 4), dicha clasificación fue popularizada por Max Tegmark en a principios de esta década [4]. Los modelos a los cuales se asocia cada nivel de multiverso son: física estadística, mecánica cuántica, cosmología cuántica, cuerdas, paisaje de cuerdas (Landscape), universos brana, nueva inflación eterna e inflación caótica, los cuales son algunos de nuestros modelos más exitosos y de los más controversiales.

Dichos modelos se explican de manera general en los capítulos siguientes. En el capítulo uno nos enfocaremos en el modelo de inflación, de donde surge y cuál fue la motivación para generar este modelo propuesto a principios de los años 80's del siglo pasado por Alan Guth [35], el cual conforme se ha hecho investigación teórica sobre este modelo nos lleva a los modelos de nueva inflación eterna [36] e inflación caótica [37].

En el capítulo dos estudiaremos el modelo de la cosmología cuántica, que trata de explicar el origen del universo. Después nos enfocamos en el modelo de universos brana, en particular en un modelo en el cual el universo se crea mediante la introducción del campo de Ramond-Ramond [38] encontrando el comportamiento de la probabilidad de creación del universo dependiendo de ciertos parámetros expuestos más adelante.

En el capítulo tres veremos de una manera un poco más completa el cómo se desarrollan y la manera de cómo surgen cada uno de los niveles multiverso, tomando como base los capítulos previos.

Finalmente damos las conclusiones de esta tesis y se agregan unos apéndices que complementan la descripción teórica de la tesis.

Capítulo 1

EL UNIVERSO TEMPRANO E INFLACIÓN

1.1. Problemas del escenario de la gran explosión caliente

Las propiedades observadas de las galaxias, cuásares y supernovas, con corrimiento al rojo (representado por z) relativamente pequeño ($z < 6$), nos habla del universo en el tiempo de $t < 1$ Gyr. Las propiedades de la radiación cósmica de fondo, nos hablan del universo en tiempos de su última dispersión ($z \approx 1100$, $t_{ls} \approx 0,35$ Myr). La abundancia de elementos ligeros tales como el deuterio y el helio, nos hablan del tiempo de la nucleosíntesis de la gran explosión ($z_{nuc} \approx 3 \times 10^8$, $t_{nuc} \approx 3$ min.).

De hecho las observaciones de las nubes de gas primordial son a grosso modo un cuarto de helio por masa, cuando según nuestros modelos debería ser todo helio o todo hidrógeno, lo cual nos dice que tenemos una falla en el entendimiento acerca de lo que ha pasado en el tiempo de la separación neutrón-protón ($z_{freeze} \approx 4 \times 10^9$, $t_{freeze} \approx 1$ seg).

Así que lejos de ser una teoría triunfal, el escenario de la gran explosión caliente se sigue trabajando. Este escenario, en el cual el universo temprano fue dominado por la radiación, tiene 3 problemas principales llamados: el problema de la planicidad, el problema del horizonte y el problema del monopolio [29]. Sin embargo para entender estos problemas es necesario tener bases de la cosmología estándar, por lo cual es recomendable la lectura del apéndice (3.4).

1.1.1. El problema de la planicidad

La curvatura del universo está relacionada al parámetro de densidad Ω por la ecuación de Friedmann:

$$1 - \Omega(t) = -\frac{kc^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}, \quad (1.1)$$

y en el presente están ligados por

$$1 - \Omega_0 = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}. \quad (1.2)$$

Los resultados de observaciones a supernovas tipo Ia y las mediciones de la anisotropía de la radiación cósmica de fondo, es consistente con el valor:

$$|1 - \Omega_0| \leq 0.2.$$

¿Por qué debería el valor de Ω_0 ser tan cercano a 1 hoy en día? Pudiendo tener un valor de 10^6 ó 10^{-6} sin violar ley física alguna. Podríamos decir que es mera coincidencia y decir que las condiciones iniciales

fueron las apropiadas para $\Omega_0 \approx 1$ hoy. Además, $\Omega = 0.8$ ó $\Omega = 1.2$ no es tan cercano a 1. Sin embargo, cuando extrapolamos el valor de $\Omega(t)$ atrás en el pasado, la cercanía de Ω con la unidad se vuelve más difícil de ignorar.

Combinando (1.1) y (1.2) tenemos:

$$1 - \Omega(t) = \frac{H_0^2(1 - \Omega_0)}{H(t)^2 a(t)^2}. \quad (1.3)$$

Cuando el universo fue dominado por radiación y materia, $t \ll t_{m\Lambda} \approx 10$ Gyr, el parámetro de Hubble estuvo dado por la ecuación:

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}. \quad (1.4)$$

De lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} 1 - \Omega(t) &= \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} \right)^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_0}{a^2} \right) = \left(\frac{1 - \Omega_0}{a^2} \right) \frac{a^7}{\Omega_{r,0} a^3 + \Omega_{m,0} a^4} \\ &= \frac{(1 - \Omega_0) a^2}{\Omega_{r,0} + a \Omega_{m,0}}. \end{aligned}$$

Durante el periodo cuando el universo fue dominado por la radiación y materia, la desviación de Ω con respecto de 1 crece constantemente.

Durante la fase de dominio de la radiación:

$$|1 - \Omega|_r \propto a^2 \propto t. \quad (1.5)$$

Durante la fase de dominio de la materia:

$$|1 - \Omega|_m \propto a \propto t^{2/3}. \quad (1.6)$$

Suponiendo que la evidencia indica que el universo esta descrito por un modelo cerrado del modelo patrón, con $\Omega_{r,0} = 8.4 \times 10^{-5}$, $\Omega_{m,0} = 0.3 \pm 0.1$ y $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7 \pm 0.1$. En el presente, el parámetro de densidad cae dentro de los limites $|1 - \Omega_0| \leq 0.2$.

En el tiempo de la igualdad de radiación-materia, el parámetro de densidad Ω_{rm} era próximo a uno en una cantidad:

$$|1 - \Omega_{rm}| \leq 2 \times 10^{-4}.$$

Sí extrapolamos más atrás en el tiempo de la nucleosíntesis de la gran explosión, con $a \approx 3,6 \times 10^{-8}$, la desviación del parámetro de densidad Ω_{nuc} de 1 es:

$$|1 - \Omega_{nuc}| \leq 3 \times 10^{-14}.$$

En el tiempo de la formación del deuterio, la densidad del universo fue igual a la densidad crítica en una relación de 1 parte en 30 trillones (30×10^{12}). Sí forzamos nuestra extrapolación tanto como podamos atrevernos, al tiempo de Planck $t_p \approx 5 \times 10^{-44}$ s, $a_p \approx 2 \times 10^{-32}$ seg, encontramos que el parámetro de densidad está extremadamente cercano a 1:

$$|1 - \Omega_p| \leq 1 \times 10^{-60}.$$

El número 10^{-60} es muy pequeño, para darnos un ejemplo, sí usted quisiera modificar la masa del sol en 1 parte en 10^{60} , debería quitar o agregar 2 electrones. Nuestra existencia depende del equilibrio entre la densidad actual y la densidad crítica del universo temprano. Sí, por ejemplo, la desviación de

Ω con respecto a 1 en el tiempo de la nucleosíntesis hubiese sido de una parte en 30000 o en lugar de 1 parte en 30 trillones, el universo habría colapsado en una gran recolapso ("crunch") ó expandido como un gran enfriamiento de baja densidad, sólo en unos pocos años, por lo cual las galaxias, estrellas, planetas y cosmólogos no habrían tenido tiempo para formarse.

Quizá podría tratar de descalificar la planicidad extrema del universo temprano, tomándola como una coincidencia. Sin embargo, una coincidencia al nivel de una parte en 10^{60} sería extremadamente forzada. Sería más satisfactorio si pudiésemos encontrar un mecanismo físico para el aplanamiento del universo en su historia temprana, en lugar de recurrir a condiciones iniciales extremas en el tiempo de Planck.

1.1.2. Problema del horizonte

El problema del horizonte es simplemente la afirmación de que el universo es isótropo y homogéneo a gran escala. Pero ¿Por qué representaría esto un problema?, al contrario, si tomamos la homogeneidad y la isotropía del universo como una bendición, después de todo es esto lo que nos permite el describir su curvatura mediante una relativamente sencilla ecuación de Friedmann. Si el universo fuese inhomogéneo y anisótropo a gran escala sería muy difícil describirle matemáticamente.

Pero, ¿Por qué tendría el universo que facilitarnos la vida a los cosmólogos? De hecho la homogeneidad y la isotropía del universo son realmente inesperadas en el escenario de la gran explosión caliente. Considerando dos puntos anti polares en la última superficie de dispersión, la cual es la superficie que encierra al observador el universo se volvió transparente, i.e., la densidad del universo se volvió lo suficientemente baja como para que los fotones pudiesen viajar libremente (como se muestra en la figura (1.1)).

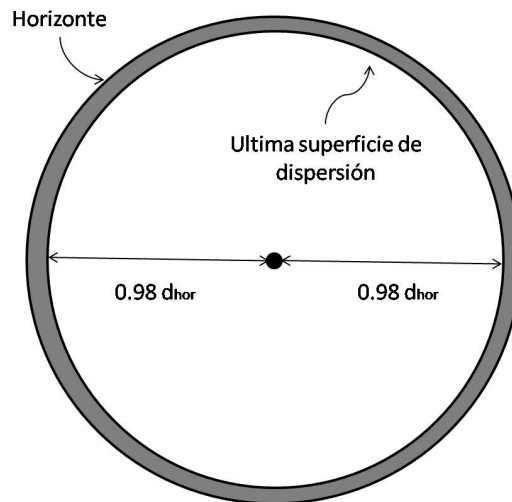


Figura 1.1: En el modelo estándar de la gran explosión caliente, la correspondiente distancia de la última superficie de dispersión es del 98 % de la distancia correspondiente a la distancia del horizonte

La correspondiente distancia propia de la última superficie dispersora es

$$d_p(t_0) = c \int_{t_s}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Dado que la última dispersión de los fotones de la radiación cósmica de fondo fue ya hace mucho tiempo ($t_s \ll t_0$), la correspondiente distancia propia de la última superficie de dispersión es solamente un poco más pequeña que la correspondiente distancia propia del horizonte. Para el modelo patrón,

$d_{is}(t_0) = 0.98d_{hor}(t_0)$. Así dos puntos antipodas de la última superficie de dispersión, separados 180° según un observador terráqueo, están separados consecuentemente $1.96d_{hor}(t_0)$. Dado que estos dos puntos están tan separados casi tanto como la misma distancia del horizonte, están causalmente desconectados. Esto es, no hay forma de que estos dos puntos se comuniquen, en particular que alcancen un equilibrio termodinámico entre ellos.

Tampoco sucede que los dos puntos posean la misma temperatura dentro de un rango de 1 en 10^5 . ¿Por qué? ¿Cómo pueden dos puntos los cuales no han tenido el tiempo suficiente para intercambiar información ser tan idénticos en sus propiedades?.

En el escenario de la gran explosión caliente, el universo fue dominado por la materia en el tiempo de la última dispersión, la distancia del horizonte en ese momento se puede aproximar al valor:

$$d_{hor}(t_{ls}) = 2 \frac{c}{H(t_{ls})},$$

para un universo plano y dominado por la materia. Dado que la distancia de Hubble en los tiempos de la última dispersión fue $c/H(t_{ls}) \approx 0,2$ Mpc, la distancia del horizonte fue sólo $d_{hor}(t_{ls}) \approx 0,4$ Mpc. Así puntos alejados más de 0,4 Mpc en el tiempo de la última dispersión, no estaban causalmente en contacto, dentro del escenario de la gran explosión caliente.

La distancia diámetro-angular de la última superficie dispersora es $d_A \approx 13$ Mpc. Así los puntos sobre la última superficie de dispersión que fueron separadas por una distancia de horizonte tomarán una separación angular igual a:

$$\theta_{hor} = \frac{d_{hor}(t_{ls})}{d_A} \approx \frac{0,4 \text{ Mpc}}{13 \text{ Mpc}} \approx 0,03 \text{ rad} \approx 2^\circ,$$

como se vería hoy en día desde la tierra. Por lo tanto, puntos sobre la última superficie de dispersión separados por un ángulo $\sim 2^\circ$ están fuera de contacto entre sí en el tiempo en que las fluctuaciones de temperatura fuesen fijadas sobre la radiación cósmica de fondo. Aun así encontramos que $\delta T/T$ es del orden de 10^{-5} en escala $\theta > 2^\circ$.

Entonces, ¿Por qué regiones que estuvieron fuera de todo contacto causal son tan parecidas?. Aun invocado a la coincidencia se requiere demasiada imaginación para concebirlo. La última dispersión se puede dividir en 20000 parches de 2° cada uno, los cuales están causalmente desconectada, y aun así estos tienen fluctuaciones mínimas de temperatura.

1.1.3. Problema de monopolo

Todos recordamos la primer unificación de dos fuerzas fundamentales, de hecho, las estudiamos en cursos básicos, me refiero al electromagnetismo, dicha unificación fue realizada por Maxwell, en la década de los 70's del siglo XIX. Alrededor de un siglo después, Steven Weinberg, Abdus Salam y Sheldon Glashow concibieron de manera satisfactoria una teoría electrodébil. Demostrando que para partículas con energías mayores a $E_{EW} \sim 1$ TeV, las fuerzas electromagnética y débil son una misma. Esta energía corresponde a una temperatura de $T_{EW} \sim E_{EW}/k \sim 10^{16}$ K.

Desde este punto, muchos físicos han buscado la forma de dar el siguiente paso mediante la extrapolación de las propiedades conocidas de las interacciones electrodébil y fuerte. Para partículas de altas energías, a esta unificación (que aún está en proceso), se le llama teoría de la gran unificación (GUT por sus siglas en inglés). Los físicos estiman que la energía de la GUT, esta a groso modo, entre 10^{12} y 10^{13} TeV, a este nivel de energía, la interacción fuerte y la electrodébil deberían de unirse, como una sola "gran fuerza unificada". Sí la energía de la GUT es $E_{GUT} \sim 10^{12}$ TeV, a esto le correspondería una temperatura de $T_{GUT} \sim 10^{28}$ K y una edad del universo de $t_{GUT} \sim 10^{-36}$ seg. La energía de la GUT es cuatro ordenes de magnitud más pequeña que la energía de Planck, $E_P \sim 10^{16}$ TeV. Por si esto fuese poco, los físicos (siempre ambiciosos y tratando de dar un paso más allá) están tratando de encontrar una Teoría Del Todo (TOE por sus siglas en inglés), que describa como la gran fuerza unificada y la fuerza de la gravedad se unen para formar una fuerza unificada en la escala de Planck. La siguiente imagen nos da una representación gráfica de lo que estamos tratando de hacer.

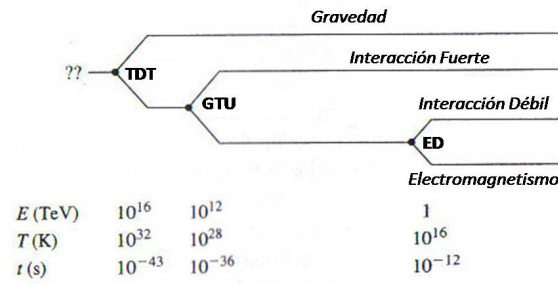


Figura 1.2: Las interacciones fundamentales y sus unificaciones

Una de las predicciones de la GUT, es que el universo estuvo bajo una *fase de transición* cuando la temperatura descendió por debajo de la temperatura de GUT. Hablando de una manera general, las transiciones de fase están asociadas con la pérdida espontánea de la simetría cuando la temperatura de un sistema desciende. Tomemos, como un ejemplo, el caso del congelamiento del agua, la cual a una temperatura mayor a 273 K, se presenta en estado líquido. Las moléculas están arbitrariamente orientadas, y el agua líquida posee simetría de tipo rotacional en sus moléculas; en otras palabras es isótropa. Sin embargo, cuando la temperatura del agua alcanza $T = 273$ K, el agua sufre una transición de fase, de líquido a sólido, y la simetría rotacional del agua se pierde. Las moléculas del agua están dispuestas en un arreglo cristalino, y el hielo, no posee la simetría rotacional del agua líquida. En otras palabras, se ha vuelto anisótropa, con direcciones preferenciales correspondientes a los ejes de simetría del cristal. De una manera semejante, hay una pérdida de la simetría cuando la temperatura del universo pasa por la fase de transición de la GUT al tiempo $t_{GUT} \sim 10^{-36}$ seg. Al $T > T_{GUT}$ existe una simetría entre la fuerza electrodébil y la fuerte, sin embargo, cuando $T < T_{GUT}$ la simetría se rompe de manera espontánea; haciendo que las fuerzas electrodébil y fuerte sigan caminos diferentes.

En general, asociamos las transiciones de fase con una ruptura de la simetría dando lugar a entes conocidos como defectos topológicos. Para ver como los defectos topológicos se forman, considere un tubo largo de agua enfriada debajo de $T = 273$ K. Usualmente, la congelación del agua comenzará en 2 o más lugares ampliamente separados. El cristal que se forma sobre cualquier otro sitio de nucleación dado es muy regular, con ejes bien definidos de simetría. Sin embargo, en la frontera de los dos cristales adyacentes estarán desalineados, en estas regiones tendremos un defecto topológico, llamado "dominio de pared", donde las líneas de simetría fallan al alinearse. Otro tipo de transiciones de fase arrojan defectos unidimensionales o en forma de líneas (en un contexto cosmológico, estos defectos lineales son conocidos como *cuerdas cósmicas*). También otro tipo de transición de fase genera defectos topológicos adimensionales. Las teorías de gran unificación predicen que en la transición de fase de la GUT, se crean defectos topológicos puntuales, los cuales actúan como monopolos magnéticos. La energía en reposo de los monopolos creados en la fase de transición de la GUT están predichos a ser $m_M c^2 \sim E_{GUT} \sim 10^{12}$ TeV. Esto corresponde a una masa por encima de un nano gramo (comparable con la masa de una bacteria), la cual es demasiado masiva como para atribuirse a una sola partícula. En los tiempos de la fase de transición de la GUT, los puntos más apartados del horizonte, estarán fuera de todo contacto causal entre ellos. De modo que es de esperarse el encontrar defectos topológicos dentro de cada volumen, debido a que sus líneas de campo no están causalmente ligadas. El número de densidad de monopolos, al tiempo de su creación, sería

$$n_M(t_{GUT}) \sim \frac{1}{(2ct_{GUT})^3} \sim 10^{82} m^{-3}$$

y su densidad de energía sería

$$\varepsilon_M(T_{GUT}) \sim (m_M c^2) n_M \sim 10^{94} \text{ TeV } m^{-3}.$$

Esta es una densidad de energía es muy grande, pero aun así es 10 órdenes de magnitud menor que la densidad de energía radiativa en la misma época:

$$\varepsilon(t_{GUT}) \approx \alpha T_{GUT}^4 \sim 10^{104} \text{ TeV } m^{-3}.$$

Así los monopolos magnéticos no habrían impedido que el universo hubiese sido dominado por la radiación en el momento de la transición de fase de la GUT. Sin embargo, los monopolos magnéticos, siendo tan masivos, habrían de convertirse pronto en altamente no relativistas, con densidad de energía $\varepsilon_M \propto a^{-3}$. La densidad de energía de la radiación, por su parte, fue decayendo, con una relación de la forma $\varepsilon \propto a^{-4}$. Así, los monopolos magnéticos dominarían la densidad de energía del universo cuando el factor de escala creciese en un factor de $\sim 10^{10}$; esto es, cuando la temperatura haya caído a $T \sim 10^{-10} T_{GUT} \sim 10^{18} \text{K}$, y la edad del universo sólo era de $t \sim 10^{-16}$ seg.

Obviamente, el universo no está dominado por monopolos magnéticos hoy en día. En realidad, no hay evidencia fuerte de que existan. Todo polo norte (observado), está asociado a un polo sur, y viceversa, sin importar que tratemos de dividirlos. Esta es la esencia del problema del monopolo, ¿Donde se han ido todos los monopolos? Si bien usted podría argumentar que nunca ha habido monopolos desde el principio. No hay aún una sólo teoría definitiva de la Teoría de Gran Unificación, y en algunas variantes sobre el tema del GUT, los monopolos magnéticos no se producen. Sin embargo, los problemas de la planicidad y del horizonte no se pueden descartar. En 1981, Alan Guth, propuso la solución de inflación [35], la cual resuelve los tres problemas expuestos (problema de horizonte, problema de planicidad y problema del monopolo) mediante un sólo mecanismo cosmológico.

1.2. La solución de Inflación

¿Qué es inflación? En un contexto cosmológico, inflación puede definirse de manera general como la hipótesis, en la que en un periodo temprano de nuestro universo, éste tuvo una expansión acelerada desmedida; esto es, una época cuando $\ddot{a} > 0$. Así la ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P), \quad (1.7)$$

nos habla de \ddot{a} cuando $\varepsilon + 3P < 0$, i.e., $P < -\frac{\varepsilon}{3}$. Así, inflación tuvo lugar cuando el universo fue temporalmente dominado por una componente en la ecuación de estado $P = w\varepsilon$ (ya que las sustancias de importancia cosmológica coinciden con los gases diluidos), con $w < -\frac{1}{3}$. La implementación usual del estado de inflación es en el que el universo fue temporalmente dominado por el parámetro de la ecuación de estado $w < -\frac{1}{3}$. La implementación usual del estado de inflación es en el que el universo fue temporalmente dominado por una constante cosmológica positiva Λ_i (con $w = -1$), y esto tuvo una ecuación de aceleración que puede ser escrita en la forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda_i}{3} > 0 \quad (1.8)$$

En una fase inflacionaria cuando la densidad de energía fue dominada por una constante cosmológica, la ecuación de Friedmann fue

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda_i}{3}. \quad (1.9)$$

La constante de Hubble H_i durante la fase inflacionaria fue una constante, con el valor $H_i = (\Lambda_i/3)^{1/2}$, y el factor de escala creció exponencialmente con el tiempo:

$$a(t) \sim e^{H_i t}. \quad (1.10)$$

Para ver como un periodo de crecimiento exponencial puede resolver los problemas de planicidad, horizonte y monopolo, suponemos que el universo tiene un periodo de expansión en una edad temprana, dominada por la radiación. Por simplicidad, suponemos que el crecimiento exponencial cambió de manera instantánea al tiempo t_i , y luego de un tiempo t_f , el crecimiento exponencial se detiene instantáneamente, y

nuestro universo volvió a su estado anterior de expansión dominado por la radiación. En este caso simple, podemos escribir el factor de escala como:

$$a(t) = \begin{cases} a_i(t/t_i)^{1/2} & t < t_i \\ a_i e^{H_i(t-t_i)} & t_i < t < t_f \\ a_i e^{H_i(t_f-t_i)}(t/t_f)^{1/2} & t > t_f. \end{cases} \quad (1.11)$$

De esta forma, entre el tiempo t_i , cuando la inflación exponencial comenzó, y el tiempo t_f , cuando esta se detuvo, el factor de escala se incremento por un factor

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^N, \quad (1.12)$$

siendo N el número de incremento exponencial

$$N \equiv H_i(t_f - t_i). \quad (1.13)$$

Sí la duración de la inflación, $t_f - t_i$, fue larga, comparado con el tiempo de Hubble de aquella época, H_i^{-1} , entonces N fue grande, y el crecimiento del factor de escala durante inflación fue enorme.

Para concretizar, tomemos un modelo posible de inflación. En este modelo, propondremos que la inflación comienza en los tiempo de la GUT, $t_i \approx t_{GUT} \approx 10^{-36} s$, con un parámetro de Hubble, $H_i \approx t_{GUT}^{-1} \approx 10^{36} s^{-1}$, con una duración suficiente para que $N \sim 100$ tiempo de Hubble. En este modelo en particular, el crecimiento en el factor de escala durante la inflación fue de

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \sim e^{100} \sim 10^{43}. \quad (1.14)$$

Notemos que la constante cosmológica Λ_i del tiempo de inflación, fue muy grande comparada con la constante cosmológica que observamos hoy en día. Consecuentemente, la evidencia es consistente con una densidad de energía en Λ de $\varepsilon_{\Lambda,0} \approx 0,7\varepsilon_{c,0} \approx 0,004 TeV m^{-3}$. Para producir una expansión exponencial con un parámetro de Hubble $H_i \approx 10^{36} s^{-1}$, la constante cosmológica durante la época de inflación tuvo que tener una densidad de energía:

$$\varepsilon_{\Lambda_i} = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda_i = \frac{3c^2}{8\pi G}H_i^2 \sim 10^{105} TeV m^{-3}, \quad (1.15)$$

la cual es 107 órdenes de magnitud mayor que la constante cosmológica actual.

1.2.1. ¿Cómo resuelve inflación el problema de la planicidad?

De la ecuación 1.1, la cual nos dá Ω como función del tiempo, obtenemos

$$|1 - \Omega(t)| = \frac{c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}, \quad (1.16)$$

para cualquier universo no perfectamente plano. Si el universo es dominado por una sólo componente con parámetro de la ecuación de estado $w \neq -1$, con $a \propto t^{2/(3+3w)}$, $H \propto t^{-1}$, y

$$|1 - \Omega(t)| \propto t^{\frac{2(1+3w)}{3+3w}}. \quad (1.17)$$

Así, sí $w < -\frac{1}{3}$, la diferencia entre Ω y 1 decrece con el tiempo. Si el universo se expande exponencialmente durante la época de inflación, entonces

$$|1 - \Omega(t)| \propto e^{-2H_i t}, \quad (1.18)$$

y la diferencia entre Ω y 1 decrece exponencialmente en el tiempo. Si comparamos el parámetro de densidad al comienzo de la inflación exponencial ($t = t_i$) con el parámetro de densidad al final de inflación ($t = t_f = t_i + N/H_i$), encontramos

$$|1 - \Omega(t_f)| = e^{-2N}|1 - \Omega(t_i)|. \quad (1.19)$$

Supongamos que antes de inflación, el universo era muy curvo, con

$$|1 - \Omega(t_i)| \sim 1 \quad (1.20)$$

Después de cien decaimientos exponenciales de inflación, la desviación de Ω de uno debe ser

$$|1 - \Omega(t_f)| \sim e^{-2N} \sim e^{200} \sim 10^{-87}, \quad (1.21)$$

aún cuando el universo a t_i no fuese particularmente cercano a ser plano, un ciento de decaimientos exponenciales de inflación, lo aplanarían. Los límites correspondientes al parámetro de densidad, $|1 - \Omega_0| \leq 0,2$, implica que $N > 60$, si inflación toma lugar alrededor del tiempo de GUT. Sin embargo, es posible que N pudiese ser mucho más grande que 60, dado que los datos observacionales son totalmente consistentes con $|1 - \Omega_0| \ll 1$.

1.2.2. ¿Cómo resuelve inflación el problema del horizonte?

Para todo tiempo t , la distancia del horizonte $d_{hor}(t)$ está dada por la relación

$$d_{hor}(t) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.22)$$

Antes del periodo inflacionario, el universo fue dominado por la radiación. Así, el horizonte al tiempo del comienzo de inflación fue

$$d_{hor}(t_i) = a_i c \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i(t/t_i)^{1/2}} = 2ct_i. \quad (1.23)$$

El tamaño del horizonte al termino de la inflación fue

$$d_{hor}(t_f) = a_i e^N c \left(\int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i(t/t_i)^{1/2}} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a_i \exp[H_i(t - t_i)]} \right). \quad (1.24)$$

Si N , el número de aumentos exponenciales de inflación, es grande, entonces el tamaño del horizonte al final de la inflación fue

$$d_{hor}(t_f) = e^N c(2t_i + H_i^{-1}). \quad (1.25)$$

La época de inflación causó que el tamaño del horizonte creciera exponencialmente. Si la inflación inició al tiempo $t_i \approx 10^{-36}$ s, con un parámetro de Hubble $H_i \approx 10^{36} \text{ s}^{-1}$, y con una duración suficiente para $N \approx 100$ aumentos exponenciales, entonces el tamaño del horizonte justo antes de inflación fue

$$d_{hor}(t_i) = 2ct_i \approx 6 \times 10^{-28} \text{ m}, \quad (1.26)$$

e inmediatamente después de inflación fue

$$d_{hor}(t_f) \approx e^N 3ct_i \approx 2 \times 10^{16} \text{ m}. \approx 0.8 \text{ pc}. \quad (1.27)$$

Durante el breve periodo de $\sim 10^{-34}$ s que dura la inflación en este modelo, el tamaño del horizonte creció de escalas submicroscópicas a casi un Pársec. Al final de la época inflacionaria, el tamaño del horizonte vuelve a crecer de manera lineal.

El resultado neto de inflación es el de incrementar el tamaño del horizonte en el universo post-inflacionario en un factor de $\sim e^N$ por encima del tamaño que hubiese tenido de no haber inflación. Por ejemplo, encontramos que, en ausencia de inflación, el tamaño del horizonte al tiempo de la última dispersión fue $d_{hor} \approx 0,4 \text{ Mpc}$. Dado un ciento de expansiones exponenciales de inflación en el universo temprano, el tamaño del horizonte de la última dispersión debería de ser $\approx 10^{43} \text{ Mpc}$, la cual es obviamente muy grande como para que toda la superficie de la última dispersión estuviese en contacto causal.

Para ver la resolución del problema del horizonte de un punto de vista diferente, considere el universo visible entero de hoy en día, esto es, la región acotada por la superficie de la última dispersión. Consecuentemente, la distancia propia para la superficie de la última dispersión es

$$d_p(t_0) \approx 1,4 \times 10^4 \text{ Mpc}. \quad (1.28)$$

Si la inflación terminó al tiempo $t_f \sim 10^{-34}$ s, esto corresponde a un factor de escala $a_f \sim 2 \times 10^{-27}$. Así, inmediatamente después de inflación, la porción del universo consecuentemente visible para nosotros está sumergido en una esfera de radio propio

$$d_p(t_f) = a_f d_p(t_0) \sim 3 \times 10^{-23} \text{ Mpc} \sim 0.9 \text{ m}. \quad (1.29)$$

Inmediatamente después de inflación, en este modelo, toda la masa-energía destinada a convertirse en billones de galaxias que vemos hoy en día estaba encerrada dentro de una esfera de sólo 2 metros de diámetro.

Si, $N = 100$ aumentos exponenciales de inflación, entonces, inmediatamente antes de la época inflacionaria, el universo visible correspondiente estaba contenido dentro de una esfera de radio propio

$$d_p(t_i) = e^{-N} d_p(t_f) \sim 3 \times 10^{-44} \text{ m}. \quad (1.30)$$

Notemos que esta distancia es 16 órdenes de magnitud más pequeño el tamaño del horizonte inmediatamente antes de inflación ($d_{hor}(t_i) \sim 6 \times 10^{-28}$ m). Así, la porción del universo que vemos hoy en día, tuvo mucho tiempo para alcanzar la uniformidad térmica antes de que inflación comenzara.

1.2.3. ¿Cómo resuelve inflación el problema del monopolos?

Si los monopolos magnéticos fueron creados antes o durante la inflación, entonces la densidad numérica de monopolos fue diluida hasta un nivel tan bajo que es prácticamente indetectable. Durante un periodo cuando el universo se expandió exponencialmente ($a \propto e^{H_i t}$), el número de densidad del monopolos, fue decreciendo de manera exponencial ($n_M \propto e^{3H_i t}$).

Por ejemplo, si la inflación comenzó alrededor de los tiempos de GUT, cuando el número de densidad de los monopolos fue, $n_M(t_{GUT}) \approx 10^{82} \text{ m}^{-3}$, después de 100 decaimientos exponenciales debido a inflación, la densidad numérica debió de ser $n_M(t_f) = e^{-300} n_M(t_{GUT}) \approx 5 \times 10^{-49} \text{ m}^{-3} \approx 15 \text{ pc}^{-3}$. La densidad numérica hoy, después de la expansión adicional de $a(t_f) \approx 2 \times 10^{-27}$ para $a_0 = 1$, debería de ser $n_M(t_0) \approx 1 \times 10^{-61} \text{ Mpc}^{-3}$. De esta forma la probabilidad de encontrar un monopolos aislado dentro de la superficie de última dispersión debería ser ínfima.

1.3. Física de la inflación

La inflación explica varios aspectos de nuestro universo que de otro modo serian desconcertantes, como la planicidad, la homogeneidad a grandes escalas y la disminución de la densidad numérica de los monopolos magnéticos. Sin embargo, aun nos quedan muchas incógnitas sin responder acerca de la época inflacionaria. ¿Qué fue lo que activó la inflación al tiempo $t = t_i$ y que fue lo que la detuvo al tiempo $t = t_f$? Si la inflación reduce la densidad numérica de monopolos a un nivel indetectable, entonces ¿Por qué no redujo el número de fotones a un nivel indetectable? Si la inflación fue tan eficiente al aplanar la curvatura global del universo, ¿Por qué no aplano también la curvatura local debido a las fluctuaciones en la densidad de energía? Además sabemos que el universo no fue perfectamente homogéneo después de inflación, porque la radiación cósmica de fondo no es perfecta.

Para contestar estas preguntas, debemos de examinar, al menos de manera general, la física detrás de inflación. Hoy en día no hay un consenso entre los cosmólogos acerca del mecanismo exacto con el cual funciona inflación. Así que nos restringiremos a hablar en términos generales acerca de un mecanismo plausible para entender la época inflacionaria.

Supongamos que el universo contiene un campo escalar $\phi(\vec{r}, t)$, cuyo valor puede variar con la posición y el tiempo (a este campo le llamaremos *campo de inflación*). De manera general, a un campo escalar se le puede asociar una energía potencial $V(\phi)$.

Si ϕ tiene unidades de energía, entonces su potencial V tiene unidades de densidad de energía, y la densidad de energía del campo de inflación es

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{2} \frac{1}{\hbar c^3} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (1.31)$$

en una región del espacio donde ϕ es homogénea. La presión del campo de inflación es

$$P_\phi = \frac{1}{2} \frac{1}{\hbar c^3} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (1.32)$$

Si el campo de inflación cambia muy lentamente con el tiempo, con

$$\dot{\phi}^2 \ll \hbar c^3 V(\phi), \quad (1.33)$$

el campo de inflación actúa como una constante cosmológica, con

$$\varepsilon_{phi} \approx -P_\phi \approx V(\phi). \quad (1.34)$$

Así, el campo de inflación puede llevar a una inflación exponencial si hubiese un lapso cuando su relación de cambio $\dot{\phi}^2$ es pequeña (satisfaciendo (1.33)), y su potencial $V(\phi)$ es suficientemente grande como para dominar la densidad de energía del universo.

Entonces preguntémosnos, ¿Bajo qué circunstancias las condiciones para la inflación coinciden en el universo temprano? Para determinar el valor de $\dot{\phi}$, comenzaremos con la ecuación de fluido para la densidad de energía del campo de inflación,

$$\dot{\varepsilon}_\phi + 3H(t)(\varepsilon_\phi + P_\phi) = 0, \quad (1.35)$$

donde $H(t) = \dot{a}/a$. Substituyendo las ecuaciones (1.32) y (1.31), encontramos la ecuación para el cambio de ϕ :

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} = -\hbar c^3 \frac{dV}{d\phi}. \quad (1.36)$$

Notemos que la ecuación (1.36) imita la ecuación de movimiento para una partícula acelerada por una fuerza proporcional a $-dV/d\phi$ siendo detenida por una fuerza de fricción proporcional a la velocidad de la partícula. Así, la expansión del universo está provista de un término de "fricción de Hubble", $3H\dot{\phi}$, la cual retarda la transición de el campo de inflación a un valor en el cual se minimiza el potencial V . Justo como un paracaidista que alcanza la velocidad terminal cuando la fuerza de atracción gravitacional hacia abajo, es equilibrada por la fuerza hacia arriba de la resistencia del aire. Así el campo de inflación alcanza una "velocidad terminal" (con $\ddot{\phi} = 0$) cuando

$$3H\dot{\phi} = -\hbar c^3 \frac{dV}{d\phi}, \quad (1.37)$$

ó

$$\dot{\phi} = -\frac{\hbar c^3}{3H} \frac{dV}{d\phi} \quad (1.38)$$

Si el campo de inflación ha alcanzado esta velocidad terminal, entonces el requerimiento de que $\dot{\phi}^2 \ll \hbar c^3 V$, necesaria para que el campo de inflación juegue el papel de una constante cosmológica, se transforma en

$$\left(\frac{dV}{d\phi} \right)^2 \ll \frac{9H^2 V}{\hbar c^3}. \quad (1.39)$$

Si el universo está sometido a la inflación exponencial conducida por la energía potencial del campo de inflación, esto nos dice que el parámetro de Hubble es

$$H = \left(\frac{8\pi G \varepsilon_\psi}{3c^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{8\pi G V}{3c^2} \right)^{1/2}, \quad (1.40)$$

y la ecuación (1.39) se convierte en

$$\left(\frac{dV}{d\phi}\right)^2 \ll \frac{24\pi G V^2}{\hbar c^5}, \quad (1.41)$$

la cual también podemos escribir como

$$\left(\frac{E_p}{V} \frac{dV}{d\phi}\right)^2 \ll 1, \quad (1.42)$$

donde E_p es la energía de Planck. Si la pendiente de inflación es lo suficientemente llana, satisfaciendo la ecuación (1.42), y si la amplitud del potencial es lo suficientemente grande para dominar la densidad de energía del universo, entonces el campo de inflación es capaz de producir a una expansión exponencial.

Como un ejemplo concreto de un potencial $V(\phi)$ que puede dar lugar a inflación, considere el potencial mostrado en la figura siguiente:

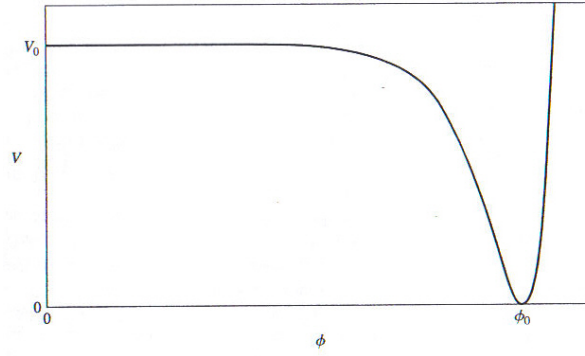


Figura 1.3: Este es un ejemplo de un potencial que pudo haber generado una época inflacionaria. El mínimo global de V (el vacío verdadero) se encuentra en $\phi = \phi_0$. Si el campo escalar comienza en $\phi = 0$, entonces está en un estado de vacío falso

El mínimo se encuentra cuando $\phi = \phi_0$. Supongamos, sin embargo, que el campo de inflación comienza en $\phi \approx 0$, donde el potencial es $V(\phi) \approx V_0$. Si

$$\left(\frac{dV}{d\phi}\right)^2 \ll \frac{V_0^2}{E_p^2}, \quad (1.43)$$

sobre la meseta, cuando $V \approx V_0$, mientras que ϕ se está acercando lentamente hacia ϕ_0 , el campo de inflación contribuye al universo con una densidad de energía $\varepsilon \approx V_0 \approx \text{constante}$.

Cuando el campo de inflación tiene un potencial semejante al de la figura de arriba, nos referimos a que se está en un *estado meta estable de vacío falso* cuando se está cerca de el máximo en $\phi = 0$. Es decir, un estado que no es del todo estable; si el campo de inflación va desde $\phi = 0$ a $\phi = +d\phi$, este continuará moviéndose lentamente hasta el *estado de vacío verdadero* en $\phi = \phi_0$ y $V = 0$. Sin embargo, si la meseta es lo suficientemente amplia o poco empinada, puede tomar muchos tiempos de Hubble para que el campo de inflación alcance el estado de vacío verdadero. De esta forma, la importancia dinámica del campo de inflación durante la transición del vacío falso al vacío verdadero, depende del valor de V_0 . Mientras $\varepsilon \approx V_0$ sea pequeña comparada con la densidad de radiación, $\varepsilon \sim \alpha T^4$, la contribución del campo de inflación en la ecuación de Friedmann puede ser ignorada.

La inflación exponencial, conducida por la densidad de energía del campo de inflación, comenzará a una temperatura

$$T_i \approx \left(\frac{V_0}{\alpha}\right)^{1/4} \approx 2 \times 10^{28} \text{K} \left(\frac{V_0}{10^{105} \text{ TeV m}^{-3}}\right)^{-1/2} \quad (1.44)$$

ó

$$kT_i \approx (\hbar^3 c^3 V_0)^{1/4} \approx 2 \times 10^{12} \text{ TeV} \left(\frac{V_0}{10^{105} \text{ TeV m}^{-3}} \right)^{1/4} \quad (1.45)$$

esto corresponde a un tiempo de

$$t_i \approx \left(\frac{c^2}{GV_0} \right) \approx 3 \times 10^{-36} \text{ s} \left(\frac{V_0}{10^{105} \text{ TeV m}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad (1.46)$$

Mientras el campo de inflación desciende al estado de vacío verdadero, este produce una expansión exponencial, con un parámetro de Hubble

$$H_i \approx \left(\frac{8\pi GV_0}{3c^2} \right)^{1/2} \approx t_i^{-1}. \quad (1.47)$$

La expansión exponencial termina cuando el campo de inflación llega al estado de vacío verdadero $\phi = \phi_0$. La duración del periodo de inflación depende entonces de la forma exacta del potencial $V(\phi)$. El número de expansiones exponenciales de la inflación, para el potencial mostrado en la figura (1.3), debe ser

$$N \sim H_i \frac{\phi_0}{\dot{\phi}} \sim \left(\frac{E_p dV}{V_0 d\phi} \right)^{-1} \left(\frac{\phi_0}{E_p} \right) \quad (1.48)$$

Entre más grandes sean los valores de ϕ_0 y V_0 (es decir, una meseta amplia) y más pequeños los valores de $dV/d\phi$ (esto es, una meseta poco empinada), tendremos un mayor número de expansiones exponenciales.

Una vez que el campo de inflación ha llegado al mínimo, el campo comienza a oscilar sobre este en ϕ_0 . La amplitud de estas oscilaciones es amortiguada por la "fricción de Hubble" proporcional a $H\dot{\phi}$ en la ecuación (1.36). Si la ecuación del campo de inflación está acoplada a cualquier otro campo en el universo, entonces, las oscilaciones de ϕ son amortiguadas más rápidamente, con la energía del campo de inflación siendo llevada por fotones u otras partículas relativistas. Estos fotones "recalientan" el universo después de la caída precipitada en la temperatura causada por la inflación. La energía perdida por el campo de inflación después de su fase de transición del vacío falso al vacío verdadero, podrían pensarse como un calor latente de esta transición.

Si el factor de escala se incrementa en

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^N, \quad (1.49)$$

durante la inflación, entonces la temperatura decaerá en un factor de e^{-N} . Si la inflación comienza alrededor del tiempo de GUT, y dura lo suficiente para lograr que $N = 100$, entonces, la temperatura decaería de un abrazante $T(t_i) \sim T_{GUT} \sim 10^{28} \text{ K}$ a un gélido $T(t_f) \sim e^{-100} T_{GUT} \sim 10^{-44} \times 10^{28} \sim 10^{-15} \text{ K}$. A una temperatura de 10^{-15} K , es de esperar que encontremos un sólo fotón en una caja de 25 unidades astronómicas de lado, comparado con los 411 millones de fotones encerrados en cada metro cubico del espacio hoy en día. Entonces, inflación no sólo resulta muy eficiente para hacer decaer la densidad numérica de los monopolos, sino también la densidad numérica de cualquier partícula, incluyendo los fotones. Sin embargo, la energía asociada con el campo de inflación se convirtió en partículas tales como fotones, de tal forma que la temperatura del universo fue restaurada a su valor pre inflacionario T_i .

La inflación explica de manera satisfactoria la planicidad, la homogeneidad y la isotropía de nuestro universo. También nos asegura que vivimos en un universo con baja densidad de monopolos magnéticos, y la inclusión del recalentamiento nos asegura que *no* vivimos en un universo con baja densidad de fotones. En cierta forma, inflación también tuvo éxito. Ésta hace al universo homogéneo e isótropo, pero lo hace demasiado homogéneo e isótropo. Cien expansiones exponenciales de inflación, no sólo aplanarían la curvatura global del universo, sino también aplanarían la curvatura local debido a las fluctuaciones de energía.

1.4. Mecanismos de inflación eterna

Discutiremos la inflación eterna primero en el contexto de la nueva inflación y después en el contexto de inflación caótica, debido a que ésta es más sutil.

1.4.1. Nueva inflación eterna

La naturaleza eterna de la nueva inflación fue descubierta por Steinhart en 1982 [36], y un año después de eso Vilenkin mostró que los nuevos modelos de inflación son genéricamente eternos [39].

Recordando que el vacío falso es un estado meta-estable, el decaimiento del falso vacío es un proceso exponencial, muy parecido al decaimiento de cualquier sustancia radioactiva ó inestable.

La probabilidad de encontrar el campo de inflación en la cima de la meseta de su diagrama de energía (figura de abajo), no cae abruptamente a cero, sino que cae exponencialmente con el tiempo. Por lo tanto, a pesar de que el vacío falso esté decayendo, nunca desaparece, y de hecho el volumen total del vacío falso, una vez iniciada inflación, continuá creciendo exponencialmente con el tiempo, indefinidamente.

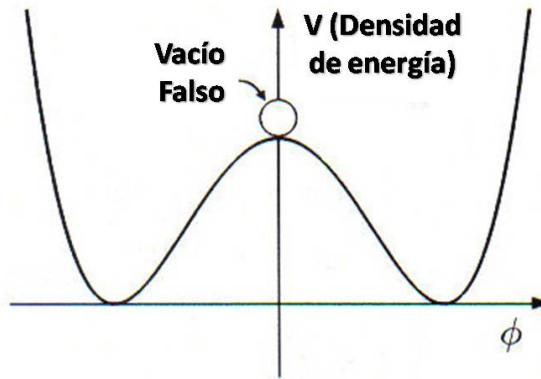


Figura 1.4: Evolución del campo de inflación durante la nueva inflación

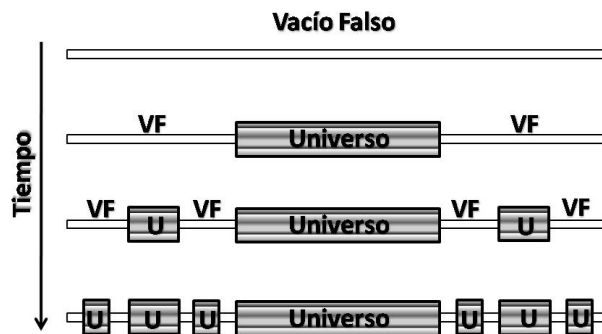


Figura 1.5: Una ilustración esquemática de inflación eterna

La figura 1.5 muestra un diagrama esquemático de un universo inflándose eternamente. La barra de arriba indica la región de vacío falso. La evolución de estas regiones es mostrada por la barra sucesiva de abajo. Como un ejemplo concreto, supongamos que el factor de escala de cada barra es 3 veces más grande que el de la barra anterior. Si seguimos la región de vacío falso como la evolución de la situación mostrada en la barra de hasta arriba, con respecto a la situación mostrada en la segunda barra, en un tercio de la región en la que el campo escalar cae por la colina del campo escalar del diagrama de potencial, precipitando una gran explosión local, el cual evolucionará en algo que eventualmente parecerá a sus habitantes como un universo. Estas grandes explosiones locales aparecen en gris y etiquetados como universo en la figura 1.5. Sin embargo, el espacio se ha expandido tanto que cada una de las 2 regiones

restantes del falso vacío son del mismo tamaño que la región inicial. Así, si seguimos la región por otro intervalo de tiempo de la misma duración, cada una de estas regiones de vacío falso se romperá en un tercio de cada evolución en universos locales, como se muestra en la tercer barra de la figura. Ahora hay 4 regiones remanentes de falso vacío, y nuevamente cada uno de ellos posee el tamaño inicial de la región inicial. Este proceso perdurará literalmente para siempre, produciendo un espacio con estructura fractal de un multiverso, resultando en un número infinito de universos locales [40].

El diagrama de la figura 1.5 es obviamente una idealización unidimensional, con un decaimiento sistemático, una mejor representación se da en la figura 1.6 en la cual se ve un modelo en 2-D, en donde el decaimiento del falso vacío es arbitrario y donde el escenario de la inflación lleva asintóticamente a una estructura fractal, en el cual el multiverso entero está poblado por universos de bolsillo a escalas pequeñas arbitrarias.

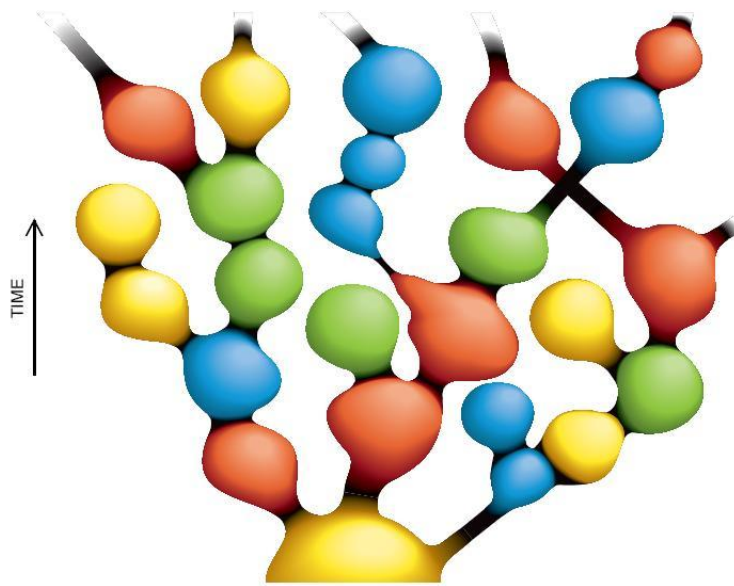


Figura 1.6: Representación 2D de la autoproducción de universos debido a inflación eterna, en la cual se enfatizan que los colores representan la “mutaciones” de las leyes de física de los universos padres

Pero lo más importante es que una vez que inflación sucede, ésta no sólo produce un universo, sino un número infinito de universos.

1.4.2. Inflación caótica eterna

La naturaleza eterna de la nueva inflación depende crucialmente de la persistencia sobre la cima de la meseta de la figura 1.4. Dado que la función potencial para la inflación caótica (figura 1.7), no tiene una meseta, no es nada obvio cómo la inflación sucede en este contexto. Sin embargo, Andrei Linde [41] mostró, en 1986, que la inflación caótica puede también ser eterna

En este caso, la inflación toma lugar cuando el campo escalar se desliza colina abajo en el diagrama de energía potencial, como en la figura 1.7, comenzando en lo alto de la colina. Como el campo rueda abajo sobre la colina, las fluctuaciones cuánticas estarán sobrepuestas en el movimiento clásico. La mejor forma de abordar eso es preguntándonos qué sucede durante un intervalo de tiempo de duración $\Delta t = H^{-1}$ (un tiempo de Hubble), en una región de un volumen de Hubble, H^{-3} . Supongamos que ϕ_0 es el valor medio de ϕ en esta región, al comenzar el intervalo de tiempo.

Por definición de un tiempo de Hubble, sabemos cuánto se expandió una longitud inicial durante este intervalo: exactamente en un factor de e . Es decir, el volumen se expandirá en un factor de $e^3 \approx 20$. Como

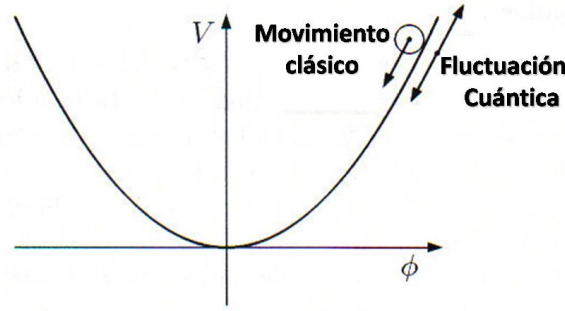


Figura 1.7: Evolución del campo de inflación durante inflación eterna caotica

las correlaciones típicamente se extienden sobre una distancia de Hubble, al final del tiempo de Hubble, el tamaño inicial de un volumen de Hubble, crecerá hasta 20 regiones independientes del tamaño de la región de Hubble.

Como el campo escalar rueda abajo por la colina de potencial, de manera clásica, el cambio en el campo $\Delta\phi$ durante el intervalo Δt , será modificado por las fluctuaciones cuánticas $\Delta\phi_{qu}$, el cuál llevará al campo de arriba a abajo relativa a su trayectoria clásica. Para cualquiera de las 20 regiones al final del intervalo temporal, podemos describir el cambio en ϕ durante el intervalo mediante

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{cl} + \Delta\phi_{qu}, \quad (1.50)$$

donde $\Delta\phi_{cl}$ es el valor clásico de $\Delta\phi$. En la teoría de perturbaciones a más bajo orden, las fluctuaciones son calculadas usando el campo cuántico libre, lo cual implica que $\Delta\phi_{qu}$, las fluctuaciones cuánticas promedio en uno de los 20 volúmenes de Hubble finales, tendrán una distribución de probabilidad Gaussiana, con un grosor del orden de $H/2\pi$ [42-45]. Hay siempre una probabilidad de que la suma de los dos términos en el miembro derecho de la ecuación (1.50) sean positivos, que el campo escalar fluctue hacia arriba y no hacia abajo. Mientras que la probabilidad es mayor que 1 en 20, entonces el número de regiones con $\phi \geq \phi_0$ será mayor al final del intervalo Δt de lo que era al principio. Este proceso, continuará por siempre, así que la inflación nunca terminará.

De esta forma, el criterio para la inflación eterna es que la probabilidad para que el campo escalar suba debe ser mayor a $1/e^3 \approx 1/20$. Para una distribución de probabilidad gaussiana, esta condición siempre se cumplirá con tal que la desviación estándar para $\Delta\phi_{qu}$ sea mayor que $0,61|\Delta\phi_{cl}|$.

Usando $\Delta\phi \approx \dot{\phi}_{cl}H^{-1}$, el criterio se convierte

$$\Delta\phi_{qu} \approx \frac{H}{2\pi} > 0,61|\dot{\phi}_{cl}|H^{-1} \Leftrightarrow \frac{H^2}{|\dot{\phi}_{cl}|} > 3,8 \quad (1.51)$$

No se ha discutido el cálculo de la perturbación de densidad en detalle, pero la condición (1.51) para inflación eterna, es equivalente a la condición de que $\delta\rho/\rho$ en escalas ultragrande, es mucho más grande que un número de orden 1.

La probabilidad de que $\Delta\phi$ sea positiva, se incrementa cuando se consideran valores grandes de ϕ , así, tarde o temprano, llegaremos al punto en el cual inflación de vuelve eterna. Si tomamos, por ejemplo, un campo escalar con un potencial:

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (1.52)$$

entonces la ecuación de movimiento de de Sitter en coordenadas planas de Robertson-Walker toma la forma:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\lambda\phi^3, \quad (1.53)$$

donde la derivada espacial se ha despreciado. En la aproximación de deslizamiento lento, también podemos despreciar el término $\ddot{\phi}$, así $\dot{\phi} \approx -\lambda\phi^3/3H$, donde H es la constante de Hubble que está relacionada con la densidad de energía mediante

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho = \frac{2\pi}{3} \frac{\lambda\phi^4}{M_p^2} \quad (1.54)$$

Ahora bien, por (1.51) tenemos

$$H^2 > 3,8|\dot{\phi}_{cl}|, \quad (1.55)$$

como

$$\dot{\phi}_{cl} \approx -\lambda \frac{\phi^3}{3H} \Rightarrow H^2 > \frac{3,8}{3} \frac{\lambda\phi^3}{H} \Rightarrow H^3 > \frac{3,8}{3} \lambda\phi^3, \quad (1.56)$$

y por (1.54) tenemos

$$H^2 = \frac{2\pi}{3} \frac{\lambda\phi^4}{M_p^2} \Rightarrow H^3 = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{3/2} \frac{\lambda^{3/2}\phi^6}{M_p^3}. \quad (1.57)$$

Combinando (1.56) y (1.57) tenemos:

$$\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{3/2} \frac{\lambda^{3/2}\phi^6}{M_p^3} > \frac{3,8}{3} \lambda\phi^3 \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{3/2} \frac{\lambda^{1/2}\phi^3}{M_p^3} > \frac{3,8}{3}. \quad (1.58)$$

Tomando la raíz cubica de (1.58) obtenemos

$$\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{\lambda^{1/6}\phi}{M_p} > \left(\frac{3,8}{3}\right)^{1/3} \Rightarrow \phi > \left(\frac{3,8}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{-1/2} \lambda^{-1/6} M_p \quad (1.59)$$

donde haciendo aritmética tenemos:

$$\phi > 0.75\lambda^{-1/6} M_p. \quad (1.60)$$

Dado que λ debe ser elegida muy pequeña, del orden de 10^{-12} , para que la perturbación de densidad tenga la magnitud correcta, este valor para el campo está generalmente muy por encima de la escala de Planck. La correspondiente densidad de energía, sin embargo, está dada por:

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4 < 0.079\lambda^{1/3}M_p^4, \quad (1.61)$$

la cual está de hecho muy por debajo de la escala de Planck.

En palabras del mismo Alan Guth [40]: *Son estas las razones por las que pensamos que inflación es casi siempre eterna. Pensamos que la inevitabilidad de la inflación eterna en el contexto de nueva inflación es realmente solido- No veo como se podría dar la posibilidad de ser evitado, asumiendo que el deslizamiento del campo escalar a partir de la cima de la colina es lenta, de tal forma que permita que la inflación tenga lugar.*

El argumento en el caso de inflación caótica es menos riguroso, pero siento confianza en que es esencialmente correcto. Para que la inflación eterna suceda, todo lo que se necesita es que la probabilidad para que el campo aumente en un volumen de Hubble dado durante un tiempo de Hubble sea mayor a 1/20.

Así, una vez que inflación comienza, no produce sólo un universo, sino un número infinito de universos.

1.4.3. ¿Podrían ser las cosas más curiosas?

La respuesta a esto es, sí. Hemos considerado el modelo más simple de inflación con sólo un campo escalar, y con sólo un mínimo en su energía potencial. Mientras que modelos relativistas de partículas elementales proponen muchos tipos de campos escalares. Por ejemplo, en las teorías del GUT, se propone que al menos existen otros dos campos escalares, donde las energías potenciales de estos campos podrían tener diferentes mínimos. Esta condición nos dice que la misma teoría podría tener diferentes "estados de vacío", correspondientes a los diferentes tipos de rompimientos de simetría entre las interacciones fundamentales, dando como resultado, diferentes leyes de la física de bajas energías.

Estas complejidades en el campo escalar se refieren a que, después de la inflación, el universo se puede haber dividido en grandes regiones las cuales poseen diferentes leyes de la física de bajas energías. Notemos que esto sólo ocurre si el universo entero comienza originalmente en el mismo estado, correspondiente a un mínimo particular de energía potencial. Es más, las fluctuaciones cuánticas grandes pueden causar que el campo escalar salte fuera de su mínimo. Esto es, que se agiten las bolas fuera de sus tazones y caigan en otro. Cada tazón corresponde a alguna ley alternativa de interacción entre partículas. En algunos modelos de inflación, las fluctuaciones cuánticas son tan fuertes que, incluso el número de dimensiones espaciales y temporales puede cambiar [2].

Si este modelo es correcto, entonces, la física por sí sólo no puede darnos una explicación completa de todas las propiedades de nuestra fracción del universo. La misma física teórica en sí, puede producir grandes partes del universo con distintas propiedades. De acuerdo con este escenario, nos encontramos a nosotros mismos dentro de una región de cuatro dimensiones con nuestro propio tipo de leyes físicas, no porque los dominios con distintas dimensiones y con propiedades alternativas sean imposibles o improbables, simplemente porque nuestro tipo de vida está diseñado para existir en estas condiciones.

Esto quiere decir que el entendimiento de todas las propiedades de nuestra región del universo requerirá, además del conocimiento de la física, una profunda investigación de nuestra propia naturaleza como seres vivos.

1.5. Paisaje de cuerdas (Landscape)

De acuerdo con la teoría general de la relatividad de Albert Einstein, la gravedad se reduce a meramente un problema geométrico, en la cual, la gravedad es debida a la deformación de la geometría del espacio-tiempo 4-dimensional; donde todo cuerpo masivo deforma el espacio-tiempo el cual obedece la ecuación de Einstein.

Pensemos entonces, si una fuerza fundamental se reduce a un problema geométrico, entonces, ¿por qué las otras fuerzas no podrían tener una explicación geométrica?, fue esta la pregunta que mantuvo ocupado a Einstein gran parte de su vida. En particular, él estaba atraído por los trabajos del alemán Theodor Kaluza y el suizo Oskar Klein, los cuales propusieron que si la gravedad refleja la forma de un espacio-tiempo 4-dimensional, entonces el electromagnetismo proviene de la geometría de una 5-dimensión adicional, la cual es demasiado pequeña como para detectarse de manera directa.

Kaluza y Klein dieron a conocer sus ideas acerca de la quinta dimensión a principios del siglo pasado, cuando los científicos sólo conocían dos fuerzas fundamentales (la gravedad y el electromagnetismo). Ellos notaron que la teoría geométrica acerca de la gravedad de Einstein podría dar la conexión con el electromagnetismo, si sólo se agregaba una dimensión extra, es decir, volver al espacio-tiempo 5-dimensional.

Si tomamos a la quinta dimensión como curvada, se podría formar un círculo tan pequeño que ni el más poderoso de nuestros microscopios pueda detectarla (sabemos que el espacio-tiempo es flexible de relatividad general). A pesar de no poder ser detectadas directamente, esta pequeña dimensión extra podría tener efectos importantes que podrían ser observados. La relatividad general, debería poder describir la geometría del espacio-tiempo 5-dimensional, el cual se puede dividir en los siguientes 3 elementos: la forma del espacio-tiempo 4-dimensional, el ángulo entre la dimensión pequeña y las otras, la circunferencia de la quinta dimensión. Para distancias grandes, la relatividad general ordinaria se cumpliría, y en cada punto la circunferencia y el ángulo tomarían un valor, tal y como dos campos permeando el espacio-tiempo y tomando valores en cada punto. Asombrosamente, el campo angular imita un campo electromagnético,

que vive en el espacio-tiempo 4-dimensional, en otras palabras, la ecuación que gobierna su comportamiento es idéntica a las ecuaciones del electromagnetismo. La circunferencia determina las magnitudes relativas de las interacciones electromagnética y gravitacional. De esta forma, de una teoría de gravitación en 5 dimensiones, nos dá ambas teorías, la de gravitación y la de electromagnetismo en 4 dimensiones.

La posibilidad de dimensiones extras también juega un papel fundamental en la unificación de la relatividad general y la mecánica cuántica. Dentro de la teoría de cuerdas, las partículas son entes 1-dimensionales, pequeños hilos abiertos y cerrados [31]. Se propone que las cuerdas midan del orden de la longitud de Planck (10^{-33} cm), lo cual explica que parezcan puntos para algo mayor a esta escala.

Para que las ecuaciones sean consistentes con supersimetría, una cuerda vibra en un espacio-tiempo 10 dimensional, es decir, 10 dimensiones extras las cuales son demasiado pequeñas para ser detectadas. Además de las cuerdas, hojas conocidas como branas (de membranas) de varias dimensiones pueden estar sumergidas en este espacio-tiempo. Esta teoría posee flujos, que pueden ser representadas en líneas de campos tal y como en el electromagnetismo clásico.

Si bien la teoría de cuerdas luce más complicada que la de Kaluza-Klein, sin embargo es más completa y unificada en el aspecto matemático. Sin embargo, el tema central de la teoría de Kaluza-Klein se mantiene: las leyes físicas que vemos dependen la geometría de las dimensiones extras.

La pregunta aquí sería entonces, ¿Qué determina esta geometría? Para relatividad general es el espacio-tiempo que obedece la ecuación de Einstein. Sin embargo, existen muchas soluciones a las ecuaciones, por lo cual muchas diferentes geometrías son permitidas. En el caso de las cuerdas, tenemos varias dimensiones extras, lo cual resulta en un mayor número de parámetros ajustables. Una sólo dimensión extra puede ser envuelta en un círculo, sin embargo, un conjunto de dimensiones extras puede tomar muchas formas diferentes (topologías), como una esfera, una dona o un par de donas unidas, . . . etc. Cada vuelta de las donas (un "handle" o asa) tiene una longitud y una circunferencia, que resulta en una enorme variedad de posibles geometrías para las dimensiones pequeñas.

Aún con la vasta colección de soluciones, no todas son iguales: cada configuración posee una energía potencial, contribuida por flujos, branas y la curvatura de las dimensiones extras. Esta energía es llamada energía del vacío, debido a que esta es la energía del espacio-tiempo 4-dimensional cuando esta ausente de materia y campos. La geometría de las dimensiones extras, tratarán de ajustarse al mínimo de energía, algo así como la pelota que rueda colina abajo hasta un punto más bajo.

El paisaje de cuerdas surge al graficar estos mínimos con respecto a dos parámetros (como por ejemplo el tamaño en general de las dimensiones extras), del cual se dá un ejemplo en la figura 1.8, en la cuales el tamaño del espacio superior, se ajusta al minimizar la energía.

Debido a que hay más de un sólo parámetro, se piensa que estas curvas de vacío son cortes de una compleja montaña multidimensional, a la cual Leonard Susskind de la Stanford University le dio el nombre de paisaje de la teoría de cuerdas. Los mínimos en el paisaje de cuerdas son configuraciones estables de espacio-tiempo (incluyendo branas y flujos), los cuales son llamados vacíos estables o verdaderos.

Las dimensiones del paisaje de cuerdas no deben ser confundidas con la de los paisajes (traducción de Landscape al español) que tenemos en nuestro mundo, ni con las dimensiones espaciales actuales, cada eje no mide alguna posición en el espacio físico, sino algún aspecto de la geometría como el tamaño de una asa o la posición de una brana.

El paisaje de la teoría de cuerdas está lejos de ser completamente mapeado. Calcular la energía del vacío es un problema difícil y usualmente depende de encontrar una aproximación apropiada. En 2003 investigadores encontraron una evidencia fuerte de que el paisaje de cuerdas posee mínimos en puntos donde un universo puede ser atrapado.

No podemos estar seguros de cuantos vacíos estables hay, pero el número debería de ser enorme.

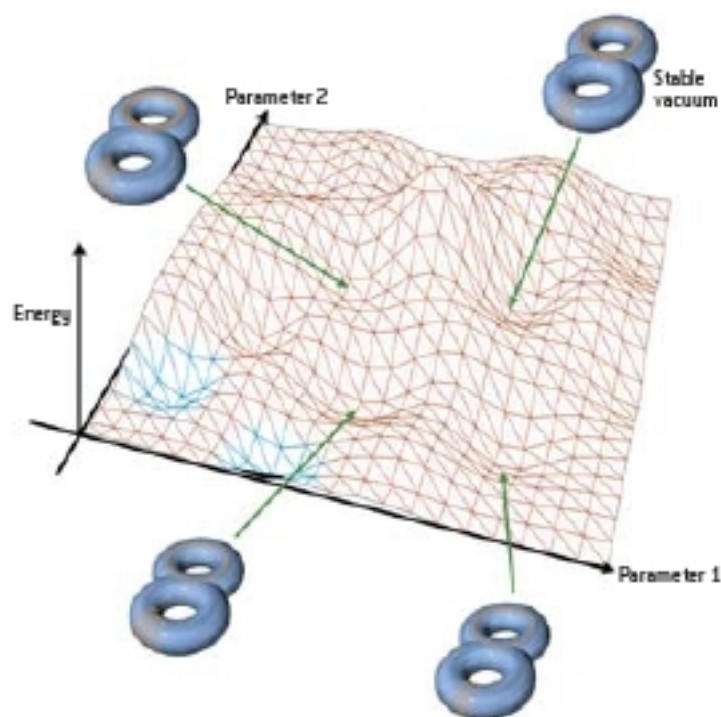


Figura 1.8: Representación del Landscape

Algunos investigadores sugieren que hay soluciones las cuales arrojan entre 500 a 1000 asas, pero no muchos más. Podemos asociar distinto número de líneas de flujo a cada asa, pero no demasiadas ya que esto las volvería inestable. Si suponemos que por cada handle puede tener entre 0 y 9 líneas de flujo (10 posibles valores), entonces, habrá entre 10^{500} y 10^{1000} configuraciones. Si tomamos que para cada asa se tiene que sólo puede haber cero o una línea de flujo, entonces hay entre 2^{500} y 2^{1000} configuraciones, lo cual se aproxima a 10^{150} y 10^{301} respectivamente.

Debido a los efectos de la energía del vacío, cada una de las soluciones tendrá diferentes fenómenos en sus respectivos mundos macroscópicos 4-dimensionales, los cuales se reflejarán en cual tipo de partículas y fuerzas estarán presentes, así como que masas y magnitudes existen en las interacciones. Si bien la teoría de cuerdas nos da un conjunto único de leyes fundamentales, no está de más remarcar que las leyes físicas que vemos en el mundo macroscópico, dependerán de la geometría de las dimensiones extra.

De esta forma muchos físicos esperan encontrar el por qué el universo posee las leyes físicas que tiene, sin embargo, ¿Qué clase de vacío verdadero se puede ajustar a nuestras leyes físicas?, ¿Por qué la naturaleza escogió este vacío en particular en lugar de otro? ¿Las otras soluciones son meramente entes matemáticos inexistentes?.

En lugar de reproducir el paisaje de cuerdas como un vacío particular y único, en el año 2000 se propuso una imagen muy distinta basada en dos ideas importantes. La primera es que el mundo no necesita estar estancado en una configuración de dimensiones pequeñas para ser bueno, debido a los efectos cuánticos que permiten a las pequeñas dimensiones saltar de una configuración a otra. La segunda es que la relatividad general de Einstein, la cual forma parte de la teoría de cuerdas, implica que el universo pueda crecer tan rápidamente que diferentes configuraciones podrán coexistir lado a lado en diferentes sub-universos, cada una tan grande que es ignorante de las otras. De esta manera el misterio en particular de que nuestro vacío debería ser el único existente queda eliminado.

Sin embargo, aún no estamos viendo la pieza clave de esta historia: el efecto de la energía del vacío en la evolución del universo. Los objetos ordinarios (energía y materia) tienden a alentar la expansión del universo e incluso podrían causar un re colapso (de ser el universo temprano lo suficientemente denso y frío). Por otra parte, la energía del vacío positiva, puede tener un efecto de antigravedad: de acuerdo con la ecuación de Einstein, causaría que las 3 dimensiones espaciales que percibimos crecieran más y más rápidamente. Cuando las dimensiones microscópicas saltan a una nueva configuración, no lo hacen todas al mismo tiempo. Por lo cual cuando el primer tunelamiento ocurre en el universo 4-dimensional, entonces, la nueva región comienza a expandirse rápidamente. Si las 3 dimensiones macroscópicas no se expandieran, entonces la expansión de la nueva región fácilmente la alcanzaría, pero la región inicial se expande también, de tal forma que esta expansión es más rápida que la de la nueva región. De esta manera, tanto la región inicial como la nueva región incrementan su tamaño. Debido a que la configuración original sigue creciendo, eventualmente ésta decaerá nuevamente en otra configuración, es decir, en otro mínimo del paisaje de cuerdas. El proceso continuará infinitamente, los decaimientos ocurren en todas las formas posibles, con regiones muy separadas perdiendo flujos de diferentes asas. De esta manera, toda región albergará muchas nuevas soluciones. En lugar de una sólo secuencia de decaimientos de flujos, el universo experimentaría todas las posibles secuencias, resultando en una jerarquía de burbujas anidadas, o subuniversos. Este resultado es muy parecido al escenario propuesto por inflación eterna de Alan Guth (MIT)[35], Alexander Vilenkin (Tufts University)[39] y Andrei Linde (Stanford University)[37].

1.6. El problema de la medida

En un universo inflándose eternamente, todo lo que puede pasar pasará; en realidad, pasará un número infinito de veces. Así, la pregunta de qué es posible se vuelve trivial todo es posible al menos que viole alguna ley de conservación. Para extraer predicciones de la teoría, debemos por lo tanto aprender a distinguir lo probable de lo improbable. Sin embargo, pronto se entiende que para definir probabilidades en un espacio-tiempo inflándose eternamente, se descubren ambigüedades. El problema es que el espacio muestra es infinito, en el cual un universo inflándose eternamente produce un número infinito de universos de bolsillo. La fracción de universos con cualquier propiedad particular es por lo tanto la resultante de dividir infinito entre infinito una división sin sentido. Para obtener una respuesta bien definida, necesitamos usar algunos métodos de regularización. Para entender la naturaleza del problema, es útil el pensar en los enteros como un sistema modelo con un número infinito de entidades. Podemos preguntarnos, por ejemplo, ¿Qué parte de los enteros son impares? La mayoría de las personas podría decir que la respuesta es $1/2$, dado que los enteros se alternan entre impares y pares. Esto es, si la cadena de enteros se trunca después del N -ésimo término, entonces la fracción de enteros impares en la cadena es exactamente $1/2$ si N es par, y es $(N + 1)/2N$, si N es impar. De cualquier caso, la fracción se aproxima a $1/2$ cuando N se aproxima a infinito. Sin embargo, la ambigüedad de la respuesta puede ser vista si se imagina otro orden para los enteros. Uno puede, si lo desea, ordenar los enteros como

$$1, 3, 2, 5, 7, 4, 9, 11, 6, \dots \quad (1.62)$$

siempre escribiendo dos enteros impares seguidos de un entero par. Esta serie incluye cada entero sólo una vez, justo como la secuencia usual (1, 2, 3, 4, ...). Los integrantes son solo arreglados en un orden inusual. Sin embargo, si truncamos la secuencia mostrada en la ecuación (1.62) después del N -ésimo término, y luego tomamos el límite $N \rightarrow \infty$, concluiremos que $2/3$ de los enteros son impares. Así, encontramos que la definición de probabilidad sobre un conjunto infinito requiere algún método de truncación, y que la respuesta no puede depender no trivialmente sobre el método que se está usando. En el caso del espacio-tiempo que se infla eternamente, la elección natural de truncación puede ser el orden de los universos de bolsillo en la secuencia en la que ellos se forman. Sin embargo, debemos recordar que cada universo de bolsillo cubre su propio cono de luz futuro, así que no hay forma de universos de bolsillo en el cono de luz futuro de otro. Cualquier par de universos de bolsillo son espacialmente separados el uno del otro, así que algunos observadores verán a uno formarse primero, mientras que otro de los observadores verá lo contrario. Podemos elegir arbitrariamente superficies equitemporales que cubre el espacio-tiempo, y luego se trunca para algún valor de t , pero esta fórmula no es única. En la práctica, diferentes formas de

elección de superficies equitemporales dan resultados distintos. Sin embargo este no es un problema que nos prohíba hacer predicciones sobre los modelos de multiverso.

Capítulo 2

COSMOLOGÍA CUÁNTICA

Si seguimos la evolución del universo hacia atrás, nos dirigiremos a la singularidad inicial, donde las ecuaciones clásicas de relatividad general fallan. Se tenía la esperanza de que la singularidad fuese una consecuencia de la alta simetría de las soluciones de Friedmann, pero estas esperanzas se desvanecieron cuando Stephen Hawking y Roger Penrose probaron su famoso teorema de la singularidad. No hay forma de escaparnos, y los cosmólogos tienen que hacer frente al problema del origen del universo.

Muchas personas sospechan que para entender qué paso en realidad en el comienzo, debemos tratar con el universo de manera mecánico cuántica y describirlo por una función de onda. Esta aproximación cuántica a la cosmología fue iniciada por DeWitt[46] y Misner [47]. La imagen que emerge de esta línea de pensamiento, es que un pequeño universo cerrado espontáneamente aparece de la nada, donde la "nada" es un estado sin espacio ni tiempo clásicos. La función de onda cosmológica puede ser usada para calcular la probabilidad de la distribución para las configuraciones iniciales del universo temprano. Una vez que el universo es creado, se espera que éste entre en un periodo de inflación, llevado por la energía del vacío falso. La energía del vacío falso eventualmente se termaliza, la inflación termina, y entonces el universo sigue el escenario de la gran explosión caliente.

La función de onda del universo ψ debe satisfacer la ecuación de Wheeler-DeWitt,

$$H\psi = 0, \quad (2.1)$$

la cual es análoga de la ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica ordinaria.

2.1. La ecuación de Wheeler-DeWitt

La naturaleza no se cuantiza, está naturalmente cuantizada.

¿Cómo podemos cuantizar la cosmología en particular?, más aún, ¿Cómo es cuantizado un sistema clásico? Si un potencial depende sólo de las coordenadas, el hamiltoniano, $H(p, x)$, es sólo la energía total expresada en función de las coordenadas y de los momentos canónicos. Considerando por simplicidad un sistema unidimensional, para el cual el hamiltoniano tiene la forma siguiente:

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) = E. \quad (2.2)$$

Reemplazando la coordenada x y su momento canónico, p , por sus operadores correspondientes,

$$p \rightarrow \hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$x \rightarrow \hat{x} = x \quad (2.4)$$

construimos el operador hamiltoniano, \hat{H} . La energía, E , es reemplazada por el operador energía,

$$E \rightarrow \hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Para que así se obtenga la ecuación de movimiento (ec. de Schrödinger dependiente del tiempo), la cual actúa sobre la función de onda $\psi(x, t)$, obteniendo

$$\hat{H}\psi(x, t) = \left(-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (2.6)$$

Este procedimiento, llamado “cuantización canónica”, es el que seguiremos para cuantizar la cosmología FRW (Friedmann-Robertson-Walker). En la dinámica de esta cosmología, la homogeneidad y la isotropía requieren que el tensor de momento-energía sea el de un “fluido perfecto”, el cual posee una forma simple; la materia esta completamente parametrizada por dos funciones, su densidad, $\rho(a)$, y su presión, $P(a)$. El elemento de línea de FRW contiene sólo una función métrica, el factor de escala, el cual sólo depende del tiempo; Para este caso, sólo hay dos ecuaciones independientes de Einstein (en las cuales se trabajará en unidades naturales $\hbar = c = 1$).

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} a^3 - k, \quad (2.7)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P)a. \quad (2.8)$$

Si tomamos $\Lambda \equiv 8\pi G \rho_{vac}$, y sustituimos en la ecuación (2.7) y utilizando la ecuación de continuidad para resolver el sistema de ecuaciones [48], de lo cual tenemos que esta ecuación de Einstein toma la forma

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3} a + 1. \quad (2.9)$$

La ecuación de Einstein puede ser obtenida mediante el principio de Hamilton -El principio de mínima acción. La acción de Hilbert-Einstein -la acción gravitacional- es función de la métrica, y de las primera y segunda derivada. La ecuación de Einstein en sí es la ecuación de Euler-Lagrange para la acción. En el caso de un universo cerrado FRW la acción toma la forma

$$S_{grav} \equiv \int dt L_{grav} = \frac{3\pi}{4G} \int dt \left[-\dot{a}^2 a + a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) \right]. \quad (2.10)$$

Para la cual el momento canónico, p_a , es fácil de obtener

$$p_a \equiv \frac{\partial L_{grav}}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\pi}{2G} \dot{a} a. \quad (2.11)$$

La ecuación de Einstein (2.9), puede ser escrita como

$$p_a^2 + \left(\frac{3\pi}{2G} \right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) = 0. \quad (2.12)$$

Cuantizándola tenemos la ecuación de Wheeler-DeWitt.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \left(\frac{3\pi}{2G} \right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) \right] \psi(a) = 0. \quad (2.13)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación de Schrödinger unidimensional, para una partícula de media unidad de masa y de energía cero, sujeta a un potencial

$$v(a) \equiv \left(\frac{3\pi}{2G} \right) a_0^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - \frac{a^4}{a_0^4} \right). \quad (2.14)$$

El cual es el potencial que se muestra en la figura 2.1

En el cual se ha elegido por conveniencia, $a_0^2 = G$. El universo cuantizado FRW es entonces matemáticamente equivalente a un simple problema unidimensional en mecánica cuántica no relativista. La “partícula” en la posición a representa un universo con ese factor de escala. La región dentro de la barrera, $0 < a < a_0$, esta clásicamente prohibida para las partículas de energía cero; en cambio, la región, $a \geq a_0$ es clásicamente permitida.

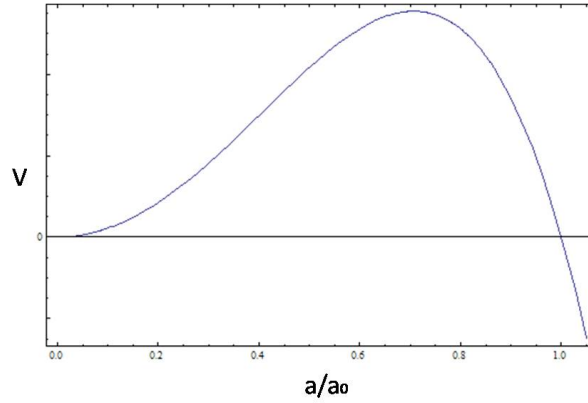


Figura 2.1: gráfica del potencial de Wheeler-DeWitt

2.2. Cosmogénesis cuántica y la creación del universo de la nada

Al analizar el caso cuando el factor de escala, $a = 0$, es decir, el universo FRW de tamaño cero, este es uno de los puntos débiles de la teoría de la gran explosión caliente. Para evitar este problema mediante la cosmología cuántica, se propone un caso de tunelamiento de una barrera de potencial, para así el universo mismo aparezca como un ente, no de factor de escala $a = 0$, sino como un ente con factor de escala distinto de cero, i.e., $a = a_0 > 0$. En si esto implica una creación espontánea de un universo no singular. Eligiendo una función de onda de tunelamiento, el problema se reduce a calcular la probabilidad con la cual esto puede ocurrir. Si denotamos la amplitud para la creación de un cierto universo FRW por $\langle FRW(a_0)|nada \rangle$, entonces, la ecuación de la probabilidad de tunelamiento para $V \geq E$

$$P \simeq \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m[V(x) - E]} dx \right\}, \quad (2.15)$$

al combinarse con el potencial de la ecuación de Wheeler-DeWitt, ec. (2.14), obtenemos

$$|\langle FRW(a_0)|nada \rangle|^2 \equiv P \simeq \exp \left[-\frac{3\pi}{G} \int_0^{a_0} a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{1/2} da \right]. \quad (2.16)$$

Evaluando la integral y sustituyendo encontramos

$$P(\rho_{vac}) \simeq \exp \left(-\frac{3}{8G^2 \rho_{vac}} \right). \quad (2.17)$$

La aproximación de tunelamiento de la cosmología cuántica asume que nuestro universo fue creado en una especie de tunelamiento de esta especie. Una vez creado, el universo inmediatamente comienza una expansión de inflación de DeSitter.

Para un modelo en el cual la densidad de energía total del universo está dada por

$$\rho = \rho_v + \epsilon/a^4, \quad (2.18)$$

donde a es el factor de escala y ϵ es una constante que caracteriza la cantidad de radiación. De esta manera, la ecuación de evolución para a puede ser escrita como

$$p^2 + a^2 - a^4/a_0^2 = \epsilon, \quad (2.19)$$

donde $p = -\dot{a}$ es el momento conjugado de a y $a_0 = (3/4)\rho_v^{-1/2}$. La ecuación de Wheeler-DeWitt para este modelo se puede obtener mediante cuantización canónica, sustituyendo $p \rightarrow -i\hbar da/da$ en la ecuación 2.19, obtenemos

$$\left(\frac{d^2}{da^2} - a^2 + \frac{a^4}{a_0^2} \right) \psi(a) = 0. \quad (2.20)$$

Esta ecuación tiene soluciones de onda entrantes y salientes correspondientes a la expansión y contracción del universo en la región clásicamente permitida $a \geq a_0$. Las soluciones en la región prohibida ($a < a_0$) crecen y decrecen exponencialmente. Las condiciones de frontera que seleccionan a la función de onda requieren que ψ deba incluir sólo una onda saliente cuando $a \rightarrow \infty$. La función de onda que está bajo la barrera de potencial, es una combinación lineal de soluciones crecientes y decrecientes. Las dos soluciones tienen magnitudes comparables cerca del punto $a = a_0$, pero las soluciones decrecientes dominan en el resto de la región clásicamente prohibida.

2.3. Introducción a universos brana

Hoy en día, con la cosmología estándar, la pregunta fundamental, ¿De dónde venimos? sigue aun sin tener una respuesta satisfactoria. Es por esta razón que es necesaria una nueva descripción. Los cosmólogos han pensado por largo tiempo que la cosmología cuántica puede acercarnos a la respuesta de esta pregunta [49-51] pero algunos de sus métodos son controversiales, i.e., la necesidad de variables temporales intrínsecas en la teoría [52], la validez de la aproximación de minisuperespacio, el problema de las condiciones de frontera cosmológicas [53], por mencionar algunas. Mezclando muchas ideas para tratar de dar una posible respuesta a la pregunta fundamental, el llamado escenario de mundos brana (EMB) [54, 55] ha proporcionado un camino prometedor para entender el nacimiento y la evolución de nuestro universo. Basados en la propuesta de que nuestro universo puede ser entendido como un objeto de espacio 4-dimensional enbebido en un espacio-tiempo N-dimensional ($N > 4$), la idea física principal detrás del EMB es que los campos materiales están confinados a un espacio 3-dimensional (brana) mientras que el campo gravitacional del EMB se puede extender a dimensiones espaciales mayores (el espacio de fondo o bulto), donde los gravitones pueden viajar en dimensiones extras. EMB, se enfoca en la solución al problema de jerarquía y ha sido aplicada a una gran diversidad de situaciones tales como energía y materia oscura, cosmología, inflación y física de partículas. Más aun, EMB ha sido la motivación para otras aplicaciones relacionadas de teoría del embebimiento tales como la generación de simetrías internas, gravedad cuántica y teorías Kaluza-Klein alternativas las cuales se exponen en [56-60]. En el contexto cosmológico hay predicciones de estas ideas, las cuales podría ser probadas mediante observaciones astronómicas. Son éstas las razones por lo cual EMB es tan atractiva [61]. En la propuesta de mundos brana, la gravedad en una brana que se reduce a la compactación de dimensiones extras [54] o mediante la introducción de un espacio-tiempo de fondo de anti de Sitter (AdS) [55]. Sin embargo, Dvali, Gabadadze y Porrati (DGP) [62] mostraron que, siempre en un espacio de fondo asintótico a Minkowski (Plano), la gravedad 4-dimensional puede ser recuperada si se incluye un término de curvatura de brana en términos de la acción. Más aun, DGP consideran la simetría de reflexión Z_2 con respecto a la brana, obteniendo la gravedad 4-dimensional sobre escalas menores con respecto a ciertas escalas, y 5-dimensional sobre distancias mayores [63, 64]. Cabe destacar que la simetría de reflexión no es la única posibilidad en estos modelos. Muchos trabajos han optado por casos antisimétricos [65-72], en este caso, cuando la brana está acoplada a un campo de 4-forma [70]. En un trabajo pionero, Brown y Teitelboim trabajaron sobre el proceso de creación de membranas mediante un campo antisimétrico motivados por el proceso Schwinger de creación de pares inducida por la presencia de campo un eléctrico [73]. Garriga [74] tiene también estudios sobre la creación de membranas para este campo en un espacio de fondo de de Sitter (dS). Otros autores se han interesado en la creación de mundos brana en espacio-tiempo AdS o en otra situación particular [75-79] pero, hasta donde sabemos, no hay trabajo que esté relacionado con la nucleación de universos de mundos brana (UMB) inducidos por un campo de 4-forma con un término de curvatura de brana incluida en la acción. Principalmente, EMB es estudiado en espacios de fondo AdS y dS al igual que espacios de fondo vacíos (Minkowski).

2.4. Descomposición ADM del modelo

Consideramos una brana relativista Σ , de 3 dimensiones, evolucionando en un espacio-tiempo de fondo dado de 5 dimensiones. El volumen de mundo m o trayectoria, barrida por Σ , tiene 4 dimensiones.

El volumen de mundo será descrito por inmersiones de tipo temporal

$$x^\mu = X^\mu(\xi^a) = X^\mu(t, u^A), \quad (2.21)$$

donde x^μ está en coordenadas para el fondo ($\mu, \nu = 0, 1, \dots, 4$), ξ está en coordenadas locales para m ($a, b = 0, 1, 2, 3$) y u^A está en coordenadas locales para Σ en ciertos valores de t ($A, B = 1, 2, 3$). La división de este último es semejante al formalismo de ADM para relatividad general canónica [38].

Comenzamos considerando la acción

$$S = \frac{k_1}{2} \int_m \sqrt{-\gamma} (\mathcal{R} - \Lambda_b) + \frac{k_2}{4!} \int_m \sqrt{-\gamma} A_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (2.22)$$

donde \mathcal{R} es el escalar de curvatura de Ricci del volumen de mundo m , $k_1 = M_{(4)}^2$ y $\Lambda_b = 2\rho/M_{(4)}^2$ que representa a la constante cosmológica sobre la brana (donde M_4 es la masa de Planck en 4 dimensiones); $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ es una 4-forma de campo de Ramond-Ramond sobre el espacio de fondo; $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es un tensor anti-simétrico del espacio de fondo en cual puede ser expresado en términos de el tensor de Levi-Civita como $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{abcd} e^\mu_a e^\nu_b e^\rho_c e^\sigma_d$, donde $e^\mu_a = \partial_a X^\mu = X^\mu_a$ denota los vectores tangentes del volumen de mundo. k_2 es la constante de acoplamiento entre la brana y el tensor antisimétrico.

Antes de continuar, deberíamos echar un vistazo a la descomposición ADM de algunas cantidades geométricas importantes definidas sobre las branas en nuestra aproximación geométrica. En los apéndice II y III se ha incluido notación y algunos resultados importantes para teorías de embebimiento el cual será útil en esta tesis.

Tomando en cuenta la relación de Gauss-Codazzi para la inmersión de Σ en m , las ecuaciones (3.22) y (3.22), hasta un término de divergencia tenemos una ecuación en la cual participan curvaturas intrínsecas y extrínsecas

$$\mathcal{R} = R + (k_{AB} k^{AB} - k^2), \quad (2.23)$$

donde R denota la curvatura intrínseca de Σ la cual no depende de ninguna velocidad y $k_{A,B}$ es su curvatura extrínseca asociada con la unidad temporal normal η^μ de Σ , dada por

$$\begin{aligned} k_{AB} &= -g_{\mu\nu} \eta^\mu (\mathcal{D}_A \epsilon^{\nu}_B + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \epsilon^\alpha_A \epsilon^\beta_B) \\ &:= -g_{\mu\nu} \eta^\mu \tilde{\mathcal{D}}_A \epsilon^{\nu}_B, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde $\epsilon^\mu_A = \partial_A X^\mu = X^\mu_A$ denota el vector tangente a Σ al un tiempo t y donde \mathcal{D}_A es la derivada covariante compatible con la métrica h_{AB} adaptada a Σ . $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ son los símbolos de Christoffel que están en el espacio de fondo. Además de (2.24), en Σ tenemos otro tensor de curvatura, asociado a la normal unitaria η^μ de Σ ,

$$K_{AB} = -g_{\mu\nu} n^\mu \tilde{\mathcal{D}}_A \epsilon^{\nu}_B, \quad (2.25)$$

donde $g_{\mu\nu}$ denota la métrica del espacio-tiempo de fondo. Notemos que la configuración de espacio consiste de la función de embebimiento X^μ para la brana, en vez de 3-métricas como se acostumbra en la aproximación ADM para relatividad general.

Con el fin de simplificar los cálculos, utilizaremos las siguientes relaciones las cuales serán más útiles dado que las velocidades aparecen explícitamente:

$$\begin{aligned} \kappa_{AB} &= N k_{AB} \\ &= -g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \tilde{\mathcal{D}}_A \epsilon^{\nu}_B, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde hemos usado el tiempo del campo vectorial (AII.1) representando el flujo temporal de Σ en todo el espacio-tiempo. Para propósitos canónicos la derivada temporal será muy útil

$$\frac{\partial N}{\partial \dot{X}^\mu} = -\eta_\mu = -g_{\mu\nu} \eta^\nu. \quad (2.27)$$

Necesitaremos la derivada de la curvatura extrínseca

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_{AB}}{\partial \dot{X}^\mu} &= -g_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{D}}_A \epsilon^{\nu}_B \\ &= -k_{AB} \eta_\mu + K_{AB} n_\mu, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde en la segunda línea del miembro derecho de la ecuación se ha usado la ecuación de Gauss-Weingarten (3.22).

La descomposición de la acción (2.22) nos dá como resultado

$$S = \int_{\Sigma_t} \int_R \frac{k_1}{2} N \sqrt{h} [\bar{R} + k_{AB} k^{AB} - k^2] + \int_{\Sigma_t} \int_R \frac{k_2}{3!} A_{\mu\nu\rho\sigma} \dot{X}^\mu \epsilon^{\nu A} \epsilon^{\rho B} \epsilon^{\sigma C} \epsilon^{ABC} \quad (2.29)$$

donde se ha definido $\bar{R} := R - \Lambda_b$ y h es el determinante de la métrica de la hipersuperficie h_{AB} y ϵ^{ABC} es el símbolo Σ de Levi-Civita antisimétrico.

2.5. Tensor Primordial

Definimos por conveniencia el siguiente tensor simétrico el cual es independiente de las velocidades,

$$\begin{aligned} \Theta^\mu{}_\nu &:= (h^{AB} h^{CD} - h^{AC} h^{BD}) \tilde{\mathcal{D}}_A \epsilon^\mu{}_B \tilde{\mathcal{D}}_C \epsilon^\nu{}_D \\ &= (k^2 - k_{AB} k^{AB}) \eta^\mu \eta_\nu - (kL - K_{AB} k^{AB}) n^\mu \eta_\nu \\ &\quad - (kL - K_{AB} k^{AB}) \eta^\mu n_\nu + (L^2 - K_{AB} K^{AB}) n^\mu n_\nu, \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde L denota la traza de la curvatura K_{AB} , es decir, $L = h^{AB} K_{AB}$. Este tensor será parte de la dinámica de la teoría como veremos más adelante. El tensor (2.30) fue previamente definido en [80] donde se hace un análisis de Hamilton para la geodésica de la brana gravitacional.

Algunas propiedades importantes del tensor (2.30) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \Theta^\mu{}_\alpha \epsilon^\alpha{}_A &= 0, \\ \Theta^\mu{}_\alpha \dot{X}^\alpha &= -N(k^2 - k_{AB} k^{AB}) \eta^\mu + N(kL - K_{AB} k^{AB}) n^\mu, \\ g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \Theta^\nu{}_\alpha \dot{X}^\alpha &= N^2(k^2 - k_{AB} k^{AB}). \end{aligned}$$

Adoptando la notación $\dot{X} \cdot \Theta \cdot \dot{X} := g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \Theta^\nu{}_\alpha \dot{X}^\alpha$. Tomando ventaja de los resultados previos podemos reescribir la densidad lagrangiana como:

$$\mathcal{L} = \frac{k_1}{2} N \sqrt{h} \left[\bar{R} - \frac{1}{N^2} \dot{X} \cdot \Theta \cdot \dot{X} \right] + \frac{k_2}{3!} A_{\mu\nu\rho\sigma} \dot{X}^\mu \epsilon^{\nu A} \epsilon^{\rho B} \epsilon^{\sigma C} \epsilon^{ABC}. \quad (2.31)$$

Usando el tensor (2.30), el momento asociado con las funciones de embebimiento son:

$$\begin{aligned} P_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \\ &= -\frac{k_1}{2} \sqrt{h} \left\{ \left[\bar{R} + \frac{1}{N^2} \dot{X} \cdot \Theta \cdot \dot{X} \right] \eta_\mu + \frac{2}{N} \Theta_{\mu\nu} \dot{X}^\nu \right\} + \frac{k_2}{3!} A_{\mu\alpha\beta\gamma} \bar{\epsilon}^{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.6. Constricciones canónicas

La acción (2.22) describe una teoría invariante bajo repametrización. Una pregunta natural para la descripción de Hamilton es ¿cuáles son las principales constricciones canónicas heredadas?. Esto es parte de la estructura fundamental de las teorías constreñidas de campos. De acuerdo con el algoritmo estándar de Dirac-Bergmann [81] encontraremos constricciones de los momentos (2.32). Es conveniente para los cálculos el definir la matriz $\Psi^\mu{}_\nu := \Theta^\mu{}_\nu - \lambda g^\mu{}_\nu$ donde $\lambda(x)$ es un campo no dinámico, el cual es dependiente de la norma que debe de encontrarse [80]. Si asumimos que el momento tiene la siguiente forma,

$$P_\mu = -\sqrt{h} k_1 (\Theta - \lambda g)_{\mu\nu} \eta^\nu + \frac{k_2}{3!} A_{\mu\alpha\beta\gamma} \bar{\epsilon}^{\alpha\beta\gamma}, \quad (2.33)$$

comparando (2.33) y (2.32), tenemos la condición a ser satisfecha

$$\bar{R} + \eta \cdot \Theta \cdot \eta + 2\lambda = 0. \quad (2.34)$$

Esta expresión será transformada en una restricción canónica primaria, después será expresada en términos de variables del espacio fase.

La introducción del campo $\lambda(x)$ es provechoso porque nos permite resolver la ecuación (2.33) para el vector temporal normal unitario,

$$\eta^\mu = \frac{-1}{\sqrt{h}k_1} (\Psi^{-1})^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta} \mathcal{P}_\beta, \quad (2.35)$$

donde se ha definido $\mathcal{P}_\mu = P_\mu - \frac{k_2}{3!} A_{\mu\alpha\beta\gamma} \bar{\epsilon}^{\alpha\beta\gamma}$. Sin embargo tenemos que pagar un precio, el cual es el aumento de las restricciones como se verá más adelante. Al sustituir la expresión (2.35) en la relación (2.34) dá lugar a una restricción primaria escalar principal. De manera semejante, al sustituir η^μ en su relación al cuadrado, $g(\eta, \eta) = -1$, produce otra constricción escalar.

El conjunto completo de constricciones primarias es el siguiente,

$$C_0 = \mathcal{P} \cdot (\Psi^{-1}) \cdot \mathcal{P} + h\lambda_0 k_1^2 = 0, \quad (2.36)$$

$$C_0 = \mathcal{P} \cdot (\Psi^{-2}) \cdot \mathcal{P} + hk_1^2 = 0, \quad (2.37)$$

$$C_A = \mathcal{P}_\mu X^\mu{}_A = 0, \quad (2.38)$$

$$C_\lambda = P_\lambda = 0, \quad (2.39)$$

donde hemos definido $\lambda_0 = \lambda + \bar{R}$. La tercera constricción es universal de las teorías parametrizadas, mientras que la última vino de el hecho de que λ no es un campo dinámico, es decir, su derivada en el tiempo no aparece en la lagrangiana. Es necesario mencionar que la constricción C_0 es un subproducto de C_0 usando la identidad $\partial(\Psi^{-1})^\mu{}_\nu / \partial\lambda = (\Psi^{-2})^\mu{}_\nu$.

2.7. Ecuación de Wheeler-DeWitt

Desde el punto de vista de la cosmología cuántica, todo el universo es tratado cuánticamente y está descrito por una función de onda. A diferencia de la mecánica cuántica ordinaria, donde las condiciones de frontera para la función de onda están establecidas, por la estructura física externa al sistema, en cosmología cuántica 4-dimensional no hay nada externo.

Ahora bien, hay una diferencia importante debido a la presencia del espacio de fondo. Podemos pensar que nuestro universo temprano fue una pequeña brana esférica nucleada en un espacio de fondo AdS/dS inducido por un campo totalmente anti simétrico. Se cree que las condiciones de frontera de tunelamiento son las correctas, de acuerdo con la idea de que un proceso de tunelamiento fue el mecanismo involucrado en la nucleación del universo.

El procedimiento de cuantización canónica es bien conocido, y es lo que aplicaremos a nuestro caso particular. Sustituyendo $P_\mu \rightarrow -i\frac{\delta}{\delta X^\mu}$, de tal forma que las constricciones escalares (2.36) y (2.37) se transforman en las siguientes ecuaciones cuánticas

$$\left(-i\frac{\delta}{\delta X^\mu} - p_{A\mu}\right)(\Psi^{-1})^{\mu\nu} \left(-i\frac{\delta}{\delta X^\nu} - p_{A\nu}\right)\psi = -h\lambda_0 k_1^2 \psi, \quad (2.40)$$

$$\left(-i\frac{\delta}{\delta X^\mu} - p_{A\mu}\right)(\Psi^{-2})^{\mu\nu} \left(-i\frac{\delta}{\delta X^\nu} - p_{A\nu}\right)\psi = -hk_1^2 \psi, \quad (2.41)$$

donde hemos definido $p_{A\mu} := k_2 A_{\mu\alpha\beta\gamma} \bar{\epsilon}^{\alpha\beta\gamma} / 3!$.

Consideremos una brana esférica 3-dimensional evolucionando en cualquier dS o un AdS espacio-tiempo de fondo 5-dimensional, $dS_5^2 = -A_\pm d\tau^2 + A_\pm^{-1} da^2 + a^2 d\Omega_3^2$, donde $A_\pm = 1 - \frac{\Lambda_\pm}{6} a^2 - \frac{2M_\pm^+}{M_{(5)}^2 a^2}$. El volumen de mundo generado por el movimiento de la brana puede ser descrito por el siguiente embebimiento.

$$x^\mu = X^\mu(\tau, \chi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} t(\tau) \\ a(\tau) \\ \chi \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Tomando el embebimiento (2.42) y teniendo en mente la matriz AIII.2 en la norma cósmica, somos capaces de tener la matriz inversa

$$(\Psi^{-1})^\mu{}_\nu \equiv \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & N_{3 \times 3}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3H^2(1-\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{3[-H^2a^2(1-\gamma)+2A_\pm]} & 0 \\ 0 & 0 & N_{3 \times 3}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

de tal forma que (2.40) y (2.41) se transforman en

$$-A_\pm^{-1}A\tilde{P}_0^2\psi + A_\pm B\tilde{P}_1^2\psi = -h\lambda_0 k_1^2\psi, \quad (2.44)$$

$$-A_\pm^{-1}A^2\tilde{P}_0^2\psi + A_\pm B^2\tilde{P}_1^2\psi = -hk_1^2\psi, \quad (2.45)$$

donde se introdujo la notación $\tilde{P}_\mu = -i\frac{\delta}{\delta X^\mu} - p_{A\mu}$. En la ecuación (2.43) $N_{3 \times 3}$, denota a una matriz 3×3 la cual no necesitaremos para lo siguiente.

Tomando en cuenta el valor $\lambda_0 = 3\left[-H^2(1+\gamma) + \frac{2}{a^2}\right]$ expresado en la norma cósmica, las relaciones cuánticas pueden ser reescritas como

$$\tilde{P}_0^2\psi = k_1^2(3\Phi)^2 a^8 H^6 (1-\gamma)^2 \left(\gamma - \frac{\Lambda}{6H^2}\right)\psi, \quad (2.46)$$

$$\tilde{P}_1^2\psi = -k_1^2(3\Phi)^2 a^2 \frac{(1-H^2\gamma a^2)[H^2 a^2(1-\gamma) - 2 + \frac{\Lambda a^2}{3}]^2}{(1 - \frac{\Lambda a^2}{6})^2}\psi. \quad (2.47)$$

En este momento estamos más interesados en identificar el potencial que gobierna la dinámica de nuestro modelo en vez de resolver la ecuación WDW de manera exacta. Para obtener el potencial, se propone la función de onda separable, $\psi(t, a) = \psi_1(t)\Psi(a)$. De las ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación WDW

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} = \frac{a^2 M_{(4)}^4 \left[2 - \frac{\Lambda a^2}{3} + (\gamma - 1)H^2 a^2\right]^2 (-1 + \gamma H^2 a^2)}{\left(1 - \frac{\Lambda a^2}{6}\right)^2} \Psi, \quad (2.48)$$

acompañada de la ecuación de energía

$$\left(E - \frac{k_2 F}{12} a^4\right)^2 = H^6 a^8 M_{(4)}^4 (1-\gamma)^2 \left(\gamma - \frac{\Lambda}{6H^2}\right), \quad (2.49)$$

donde se ha redefinido el momento $\tilde{P}_\mu \rightarrow (3\Phi)\tilde{P}_\mu$ y asumido que $\psi_1 = e^{-iEt}$.

2.8. Razón de nucleación

En este momento estamos listos para calcular la probabilidad de nucleación del universo. Algunas simplificaciones son necesarias debido al hecho de que el problema general es en sí difícil de resolver.

De la ecuación WDW (2.48), el potencial es fácil de obtener

$$V(a) = \frac{a^2 M_{(4)}^4 \left[2 - \frac{\Lambda a^2}{3} + (\gamma - 1)H^2 a^2\right]^2 (1 - \gamma H^2 a^2)}{\left(1 - \frac{\Lambda a^2}{6}\right)^2}. \quad (2.50)$$

Notemos que esta expresión es difícil de trabajar si estamos interesados en la integración general, especialmente si, en el contexto cosmológico, se desea obtener la probabilidad de nucleación. Tomando en cuenta las condiciones de frontera del tunelamiento, la probabilidad de nucleación [82] está escrita en términos del potencial extraído de la ecuación WDW,

$$\mathcal{P} \sim e^{-2 \int_{a_1}^{a_r} |\sqrt{V}| da}. \quad (2.51)$$

Los puntos a_r y a_1 corresponden a los puntos de inflexión clásicos cuando $V(a)|_{a_r, a_1} = 0$. Consideremos ahora el caso especial donde, $E = 0$, para lo cual la ecuación (2.49) se reduce a

$$\frac{(k_2 F / 12 M_{(5)}^2)^2}{H^6} = (1 - \Upsilon)^2 \left(\Upsilon - \frac{\Lambda}{6H^2} \right). \quad (2.52)$$

Tomemos en cuenta que Υ resulta una constante. La probabilidad de nucleación en un espacio de fondo AdS y dS es

$$\Lambda > 0 : \quad \mathcal{P} \propto \text{Exp} \left\{ - \left| - \frac{4((\Upsilon - 1) - \Lambda/3H^2)}{\Upsilon\Lambda} + 2(\Upsilon - 1)H^2 \left(\frac{6}{\Lambda} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{X_{dS}} \tan^{-1} X_{dS} \right] \right| \right\} \quad (2.53)$$

$$\Lambda = 0 : \quad \mathcal{P} \propto \text{Exp} \left\{ - \left| \frac{4(6\Upsilon - 1)}{15\Upsilon^2 H^2} \right| \right\} \quad (2.54)$$

$$\Lambda < 0 : \quad \mathcal{P} \propto \text{Exp} \left\{ - \left| - \frac{4((\Upsilon - 1) - \Lambda/3H^2)}{\Upsilon\Lambda} + 2(\Upsilon - 1)H^2 \left(\frac{6}{\Lambda} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{X_{AdS}} \tanh^{-1} X_{AdS} \right] \right| \right\} \quad (2.55)$$

donde $X_{dS} = \sqrt{\frac{\Lambda}{6H^2} \left(\Upsilon - \frac{\Lambda}{6H^2} \right)^{-1}}$ y $X_{AdS} = \sqrt{\frac{|\Lambda|}{6H^2} \left(\Upsilon - \frac{\Lambda}{6H^2} \right)^{-1}}$.

Ahora bien, grafiquemos las proyecciones en 3 y 2 dimensiones de las probabilidades anteriores para ver el comportamiento que éstas poseen. Sin embargo, para simplificar un poco la secuencia numérica, tomaremos $\beta = k_2 F / 12 M_{(5)}^2$. Debido a que la probabilidad depende de 3 parámetros en los casos $\Lambda \neq 0$ (β, Λ, H), no podemos hacer sólo una gráfica de la probabilidad, por lo cual, es necesario el graficar las proyecciones sobre espacios 3 dimensionales. Para el caso en el cual $\Lambda = 0$, se tiene una gráfica en 3 dimensiones debido al hecho de que uno de los parámetros se mantiene constante. De esta manera tenemos las siguientes gráficas:

De estas gráficas encontramos que la probabilidad posee un comportamiento asintótico a uno en el caso del espacio de fondo de de Sitter y plano. Además de manera general la probabilidad depende directamente de los valores de β y H para las regiones cercanas al origen en todos los casos, aunque después toman un comportamiento asintótico, que en el caso de un espacio de de Sitter y plano es hacia el uno y en el caso de un espacio de fondo anti de Sitter es a cero. El comportamiento mostrado en las gráficas nos dice que cuanto más crezcan la constante cosmológicas será más probable la creación de un universo para el caso de Sitter (relacionada con la "inestabilidad del espacio de de Sitter"), para el espacio de anti de Sitter, cuanto más decrece la constante cosmológica disminuye la probabilidad de creación de universos, aunque la velocidad con la que esta disminuye depende de β y de H . Si β y H son mayores que dos hacen que la razón de cambio sea ínfima. Para el caso en el que β aumenta, induce que la probabilidad de creación del universo aumente. En el caso plano ($\Lambda = 0$), se ha demostrado que el parámetro β esta acotado de la forma $\beta \leq 3$ [83] usando solamente cosmología clásica.

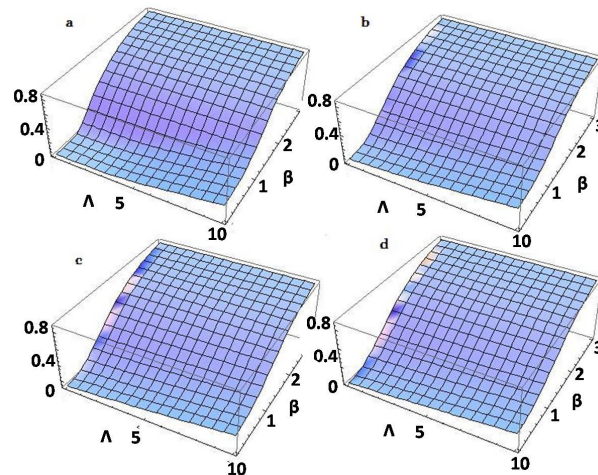


Figura 2.2: Corte 3D de la gráfica de probabilidad para el caso $\Lambda > 0$, en $\Lambda \in (0.001, 10)$ y $\beta \in (0.001, 3)$, con $H = 0.001, 2/3, 2$. Notemos que en este corte, al aumentar el valor de H se aumenta el valor de la probabilidad de nucleación

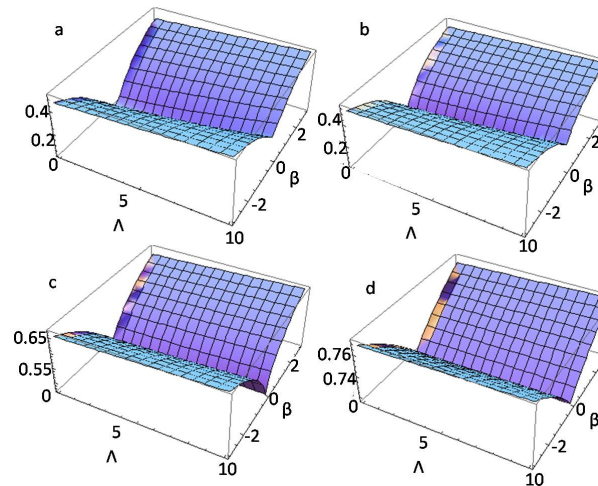


Figura 2.3: Corte 3D de la gráfica de probabilidad para el caso $\Lambda > 0$, en $\Lambda \in (0.001, 10)$ y $H \in (0.001, 3)$, con $\beta = 0.001, 1/3, 2/3, 1$. En este corte se puede apreciar que si bien al aumentar el valor de β la probabilidad aumenta, es fácil notar también que entre más se aumenta el valor de β la variación de la probabilidad con respecto a H y Λ disminuye considerablemente

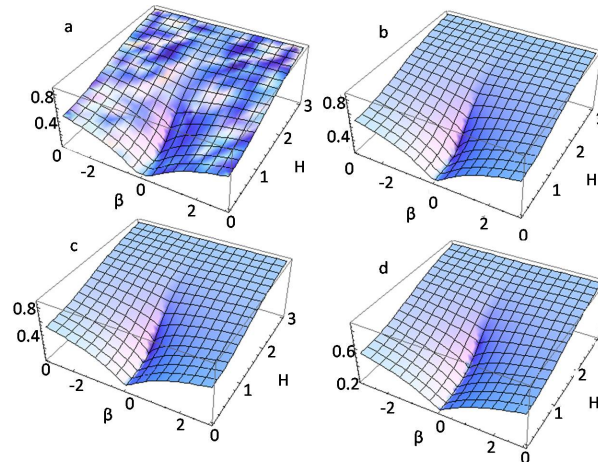


Figura 2.4: Corte 3D de la gráfica de probabilidad para el caso $\Lambda > 0$, en $\beta \in (0.001, 1)$ y $H \in (0.001, 3)$, con $\Lambda = 0.001, 10/3, 20/3, 10$, al aumentar los valores de Λ se incrementa la probabilidad, incluso en el origen, sin embargo esta conserva su valor asintótico a 1

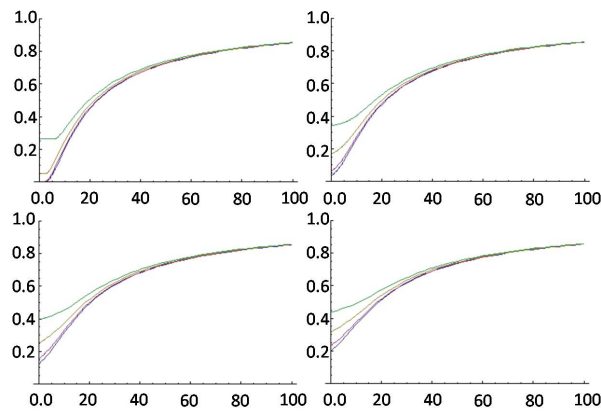


Figura 2.5: Corte con respecto a $\Lambda \in (0.001, 100)$ donde las gráficas dentro de cada marco de referencia corresponde a un valor de $\beta = 0.001, 1/3, 2/3, 1$ para los cuales entre mayor es el valor de β se tiene mayor probabilidad. Después se ha variado H en cada marco de referencia de izquierda a derecha (lo cual tomaremos como una convención en el resto de las gráficas) tomando los valores $H = 0.001, 1/3, 2/3, 1$, los cuales hacen que la probabilidad también aumente aunque sin perder su comportamiento asintótico.

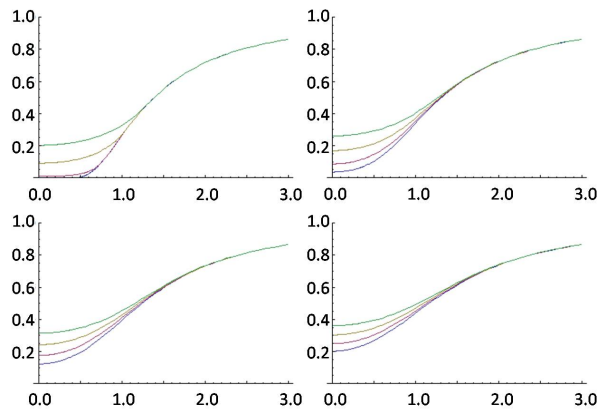


Figura 2.6: Corte con respecto a $H \in (0.001, 3)$ donde las gráficas dentro de cada marco corresponde a un valor de $\Lambda = 0.001, 10/3, 20/3, 10$ para los cuales entre mayor es el valor de Λ se tiene mayor probabilidad. Después se ha variado β conforme a la convención de la primer gráfica tomando los valores $\beta = 0.001, 1/3, 2/3, 1$.

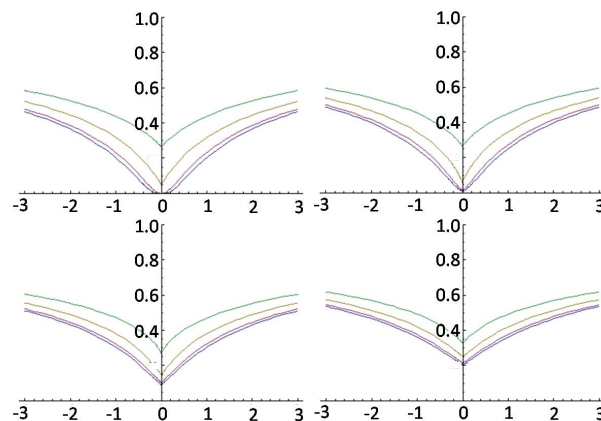


Figura 2.7: Corte con respecto a $\beta \in (-3, 3)$ donde las gráficas dentro de cada marco de referencia corresponde a un valor de $\Lambda = 0.001, 10/3, 20/3, 10$ para los cuales entre mayor es el valor de Λ se tiene mayor probabilidad, después se ha variado H tomando los valores $H = 0.001, 1/3, 2/3, 1$, siguiendo la convención de la primer gráfica.

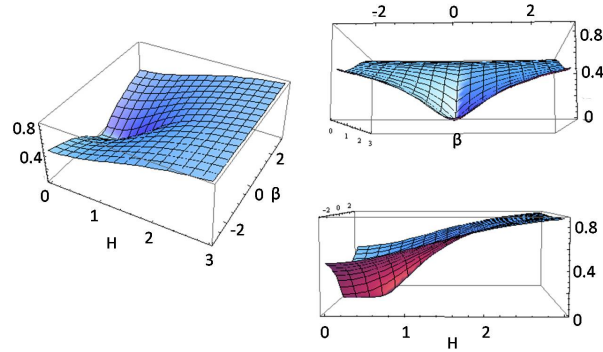


Figura 2.8: gráfica 3D en la cual se muestra la probabilidad para el caso $\Lambda = 0$, se muestran distintas perspectivas de la misma gráfica. Notemos que la probabilidad es cero sólo para una región cercana al origen

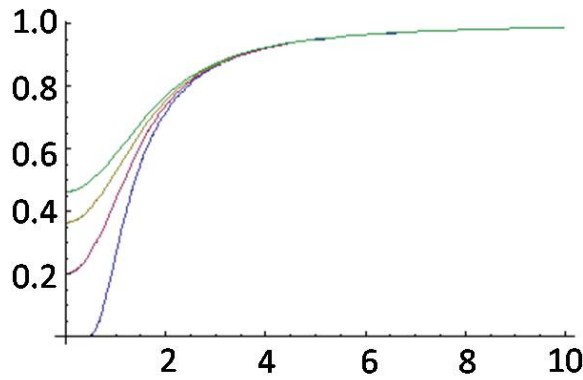


Figura 2.9: Corte de la gráfica (2.8), con respecto a H , donde, $\beta = 0, 1/3, 2/3, 1$, de tal forma que al barrer con respecto a β de forma creciente, podemos notar no sólo que la probabilidad aumenta, sino que en la región $H \in (0, 0.5)$ deja de tener valor 0, aunque la curva conserva su forma asintótica a 1.

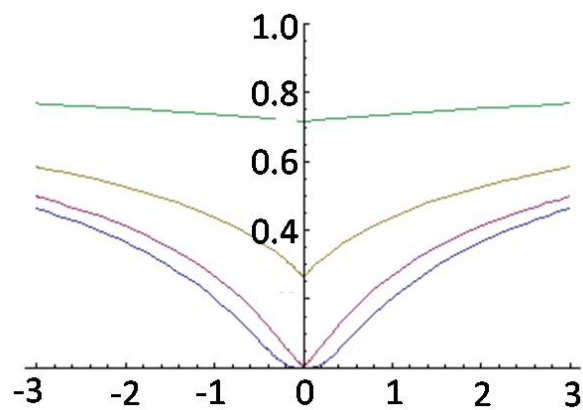


Figura 2.10: Corte de la gráfica (2.8), con respecto a β , donde, $H = 0.001, 0.5, 1, 2$. Al igual que en el corte anterior, al aumentar los valores de H , la probabilidad tiende a aumentar, aunque conforme H aumenta la razón de cambio de la probabilidad respecto a β disminuye considerablemente

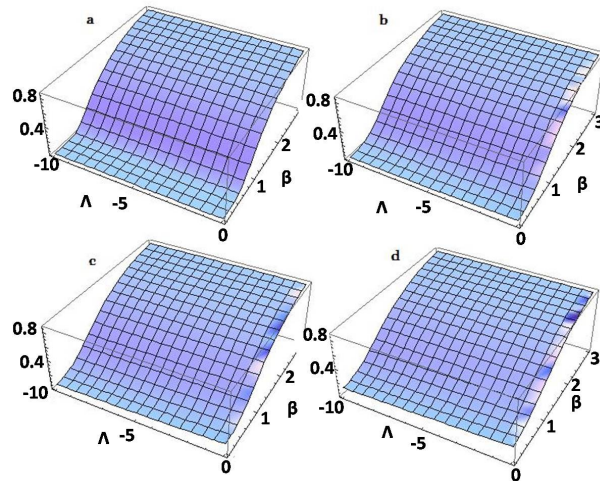


Figura 2.11: Corte 3D de la gráfica de la probabilidad para el caso $\Lambda < 0$, con los valores $\Lambda \in (-0.001, -10)$, $H \in (0, 3)$, con $\beta = 0.001, 1/3, 2/3, 1$. En este corte es sencillo darse cuenta de que la probabilidad aumenta conforme β lo hace, aunque el valor asintótico prevalece, sólo la probabilidad en la región $H = 0$ parece tener un incremento significativo con respecto a los cambios de β .

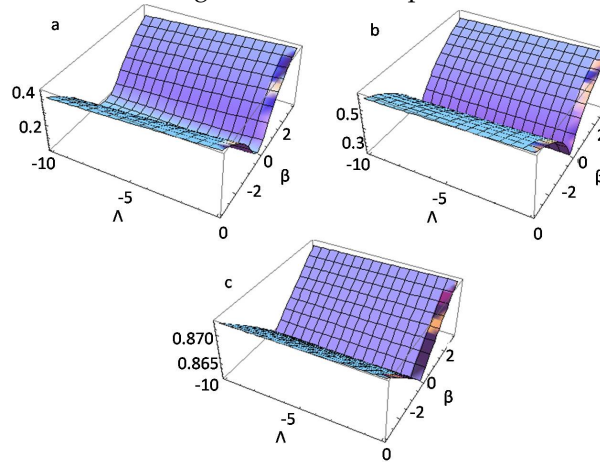


Figura 2.12: Corte 3D de la gráfica de la probabilidad para el caso $\Lambda < 0$, con los valores $\Lambda \in (-0.001, -10)$, $\beta \in (0, 1)$, con $H = 0.001, 1, 3$, nuevamente el comportamiento asintótico vuelve a aparecer, ahora con la variación de H y el aumento o disminución de la probabilidad conforme H aumenta o disminuye respectivamente.

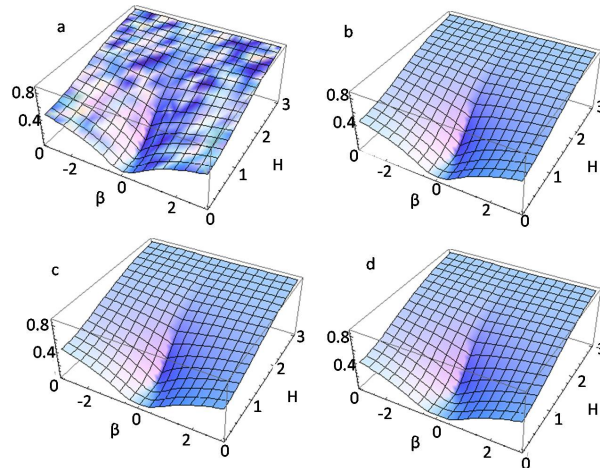


Figura 2.13: Corte 3D de la gráfica de la probabilidad para el caso $\Lambda < 0$, con los valores $\beta \in (0, 1)$, $H \in (0, 3)$, con $\Lambda = -0.001, -2.5, -5, -10$, a diferencia del espacio DeSitter, en el espacio AdS, se tiene una disminución de la probabilidad conforme se barre sobre Λ (aunque hay que notar que la probabilidad sigue aumentando o disminuye conforme Λ aumenta o disminuye), siendo más destacado este efecto en la región cercana a $\beta = 1$

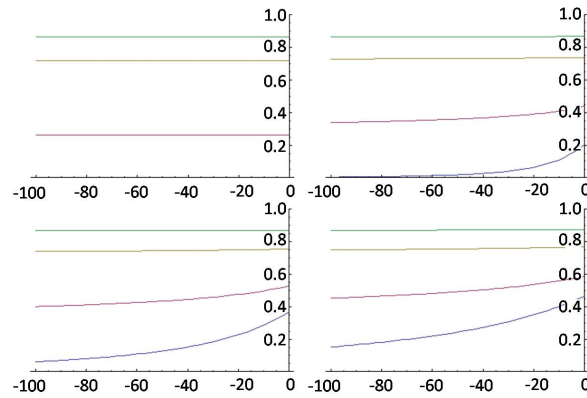


Figura 2.14: Corte con respecto a $\Lambda \in (-100, -0,001)$ para el caso $\Lambda < 0$, se observa un comportamiento decreciente de la probabilidad conforme Λ decrece. En cada marco se tienen las gráficas asociadas a los valores de $\beta = 0, 1, 2, 3$, para los cuales la probabilidad crece conforme β aumenta. A cada marco se le ha asociado un valor distinto de H los cuales fueron asignados de izquierda a derecha con valor $H = 0.001, 1, 2, 3$. La probabilidad aumenta al aumentar H aunque su razón de cambio disminuye de manera drástica para el valor $\beta = 3$

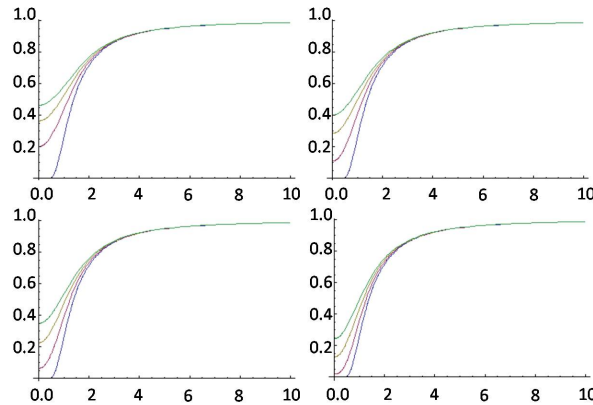


Figura 2.15: Corte con respecto $H \in (0,001, 10)$ para el cual caso $\Lambda < 0$, donde podemos observar el comportamiento asintótico de la probabilidad con respecto a 1. Las gráficas en cada marco están asociadas a un valor particular de β , el cual toma los valores $\beta = 0, 1, 2, 3$, la probabilidad aumenta o disminuye conforme β aumenta o disminuye su valor respectivamente. Por su parte cada marco esta asociado a un valor de Λ los cuales fueron asignado de izquierda a derecha, siendo los valores $\Lambda = -0.001, -10, -20 - 50$. Notemos como la probabilidad decrece conforme el valor de Λ disminuye sin perder el comportamiento asintótico a 1.

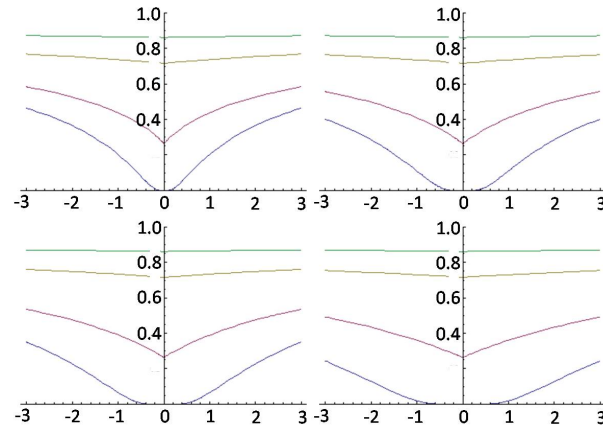


Figura 2.16: Corte 2D con respecto a $\beta \in (-3, 3)$ para el caso $\Lambda < 0$, en el cual se tiene en cada marco las gráficas asociadas a los valores de $H = 0.001, 1, 2, 3$, de las cuales se tiene que la probabilidad crece conforme H es mayor. Además a cada marco se le ha asociado un valor de $\Lambda = -0.001, -10, -20, -50$ asignados de izquierda a derecha, de tal forma que se puede apreciar como la probabilidad decrece conforme Λ disminuye sin perder su comportamiento asintótico.

Capítulo 3

NIVELES DE MULTIVERSO

Anteriormente se hizo el comentario de que había distintos tipos de multiversos, si bien esto es un tanto inesperado, es una manera de comprender que el multiverso no es sólo una consecuencia casual, un truco o un artilugio matemático que ha hecho una sólo persona, sino que más bien, nuestras grandes teorías físicas nos orillan cada una a su manera a la existencia de un pluriverso. Ahora bien, pensemos en cómo es cada uno de estos multiversos, como se construyen y como serían desde un punto de vista amplio, pensemos en la infinidad de puertas y posibilidades que cada uno de éstos nos puede mostrar.

Para mostrar esto utilizaré la clasificación estándar [4] que se le suele dar a los distintos tipos de multiversos de acuerdo a su origen, estas clases o niveles se enlistan a continuación:

- Nivel I (multiverso de configuraciones idénticas)
- Nivel II (multiverso de burbujas post inflacionarias)
- Nivel III (multiverso cuántico o de probabilidades)
- Nivel IV (multiverso matemático)

3.1. Nivel I (Multiverso de configuraciones idénticas)

El nivel I de multiverso es quizá el que menos reta al sentido común, de manera sencilla se trata sólo de pensar a nuestro otro yo que se encuentra dentro del mismo espacio-tiempo que el nuestro sólo que éste se encuentra muy lejos de usted. Este nivel de multiverso es el menos controversial, la gran mayoría de las personas pueden aceptar las cosas que no vemos pero al trasladarnos a otro lugar o esperando el tiempo suficiente podríamos ver, algo así como sentarnos en un muelle a la espera de un barco que pronto se verá por el horizonte. Algo semejante al muelle pasa en la cosmología observacional, hoy en día nuestro universo observacional está limitado a sólo la distancia que ha recorrido la luz desde que el universo dejó de ser opaco, hasta hoy en día, dicha distancia es del orden de 4×10^{26} metros, o 42 millones de años luz (Notemos que sobrepasa por mucho a los 13.5 debido a que la expansión acelerada del universo). Esta distancia es conocida como el radio de Hubble y a la esfera de radio igual a este radio se conoce como volumen de Hubble, este volumen es lo que conoceremos como nuestro universo observable.

La idea de este tipo de multiverso es bastante sencilla, y se basa en un espacio infinito predicho por relatividad general, al menos para la geometría hiperbólica y plana (y suficientemente grande en el caso de una geometría esférica, aunque no la consideraré). Además los universos espacialmente infinitos son una predicción de la teoría de inflación cosmológica. Así tenemos que dentro de un espacio-tiempo infinito tendrá un número infinito de volúmenes de Hubble, por lo cual se puede intuir que habrá volúmenes de Hubble que se repitan ya que la probabilidad de que esto ocurra no es cero, lo cual generaría universos idénticos.

Al menos para el sentido común este multiverso parece muy obvio ¿Cómo podría no ser infinito el universo?, ¿Si no lo fuese que habría fuera de él?, ¿Acaso hay algún letrero que diga borde del universo de media vuelta?, el espacio podría ser finito si tuviera una curvatura convexa o una topología poco usual (es

decir, interconectada). Un universo esférico, toroide (en forma de dona) o de cilindro anudado de diversas maneras tendría un volumen con límites pero sin bordes. La radiación cósmica de fondo nos permite hacer pruebas de tales posibilidades. Hasta ahora, sin embargo, las evidencias van en contra. Incontables modelos se ajustan a las observaciones, los cuales han impuesto severos límites a otras alternativas. Datos cosmológicos apoyan la idea de que el espacio continúa más allá de los confines de nuestro universo observable. El satélite WMAP midió hace unos años las fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo (cosmic microwave background radiation). Las fluctuaciones más grandes están a sólo medio grado por encima, lo que significa después de aplicar las reglas de la geometría que el espacio es muy grande o infinito. (Una advertencia: algunos cosmólogos especulan que el punto de discrepancia a la izquierda del gráfico es evidencia de un volumen finito).

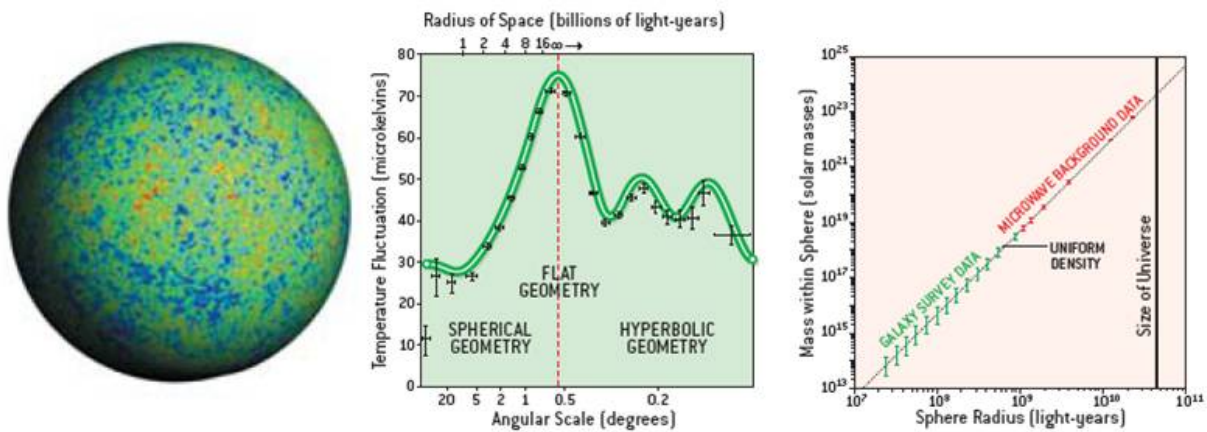


Figura 3.1:

Otra de las cosas que podría argumentarse es que la materia no necesariamente podría estar distribuida de manera uniforme dentro de todo el universo, sino que la materia estuviese confinada en cúmulos separados, esta idea es lo que ya se había comentado como universo isla, la cual se puede ver como una variante de este modelo. Otra posibilidad es en la cual la materia toma un patrón de fractal, sin embargo, WMAP y el 2dF Galaxy Redshift Survey han encontrado mediante el análisis de la radiación cósmica de fondo que el espacio-tiempo a grandes escalas está ocupado uniformemente con materia y no hay estructuras coherentes mayores de 10^{24} metros. De acuerdo con las teorías actuales, los procesos primordiales de la gran explosión esparcieron la materia con cierta aleatoriedad dando una probabilidad distinta de cero a cualquier arreglo. Se asume que en nuestro universo, con sus fluctuaciones iniciales de densidad de una parte por cada 100000 y su distribución de materia casi uniforme, es bastante típica (al menos entre los que contienen observadores). Esto resalta la estimación de que su otro yo más cercano se encuentra de 10 a $10^{10^{28}}$ metros de distancia y que a una distancia entre 10 a $10^{10^{92}}$ metros de distancia existe una esfera de 100 años luz idéntica a una centrada aquí, así que en el próximo siglo nuestra percepción del universo y la de nuestras contrapartes será la misma, a una distancia de 10 a $10^{10^{118}}$ metros se debería encontrar todo un volumen de Hubble idéntico al nuestro, i.e., un universo paralelo al nuestro!![1].

Las estimaciones anteriores son muy conservadoras, derivadas sólo de contar todos los posibles estados cuánticos que un volumen de Hubble puede contener si su temperatura no rebasa los 10^8 kelvins. Una manera de calcularlo es preguntándonos cuántos protones contendría un volumen de Hubble a esa temperatura. La respuesta es 10^{118} protones. Y cada una de esas partículas puede o no estar presente, lo que representa 2 a la 10^{118} ($2^{10^{118}}$) posibles arreglos de protones. Una caja que contuviera ese número de volúmenes de Hubble agotaría todas las posibilidades. Si redondeamos, la caja tiene unos 10 a la 10^{118} metros de ancho. Más allá de esa caja, los universos, incluido el nuestro, comienzan a repetirse. Un número bastante similar se derivaría usando cálculos termodinámicos o cuántico-gravitacionales del total de información contenida en el Universo.

Es muy probable que su otro yo se encuentre más cerca de lo que estas cifras nos sugieren (quizás en el caso de los gemelos idénticos estén incluso en su misma habitación), debido a que los procesos

de formación planetaria y de evolución biológica nos ponen las probabilidades a nuestro favor. Los astrónomos sospechan que existen del orden de 10^{24} planetas habitables e incluso algunos como la tierra.

3.1.1. ¿Cómo serían los multiversos nivel I?

Para dar una descripción desde el punto de vista físico, tradicionalmente trabajamos sobre 2 partes: las condiciones iniciales y las leyes de la física, específicamente como las condiciones iniciales evolucionan.

Los observadores que viven en universos paralelos de nivel I observarían exactamente las mismas leyes de la física que nosotros conocemos, la velocidad de la luz es c , se cumplirían las ecuaciones de Maxwell, etc., pero tendrían distintas condiciones iniciales que en nuestro volumen de Hubble, esto debido a las fluctuaciones cuánticas durante la época de inflación. Este mecanismo cuántico genera condiciones iniciales que son para propósitos prácticos arbitrarios produciendo fluctuaciones de densidad descritas por lo que los matemáticos llaman campo aleatorio ergódico. Donde ergódico se refiere a que si usted se imagina creando un conjunto de universos con sus propias condiciones iniciales, entonces la distribución de probabilidad de resultados en un volumen es idéntica a la distribución que se obtiene mediante un muestreo de diferentes volúmenes de un mismo universo. En otras palabras todo lo que en principio pueda suceder aquí, pudo suceder en cualquier otra parte.

Entonces podemos ver que este nivel nos es familiar acerca de cómo son los aspectos físicos, entonces no tendríamos problemas en imaginarnos una casa idéntica a la suya en la cual viva un ser igual a usted pero que no es usted, con su mismo perro, apellidos, esposa e hijos, donde las leyes de la física son las mismas sólo con diferentes condiciones iniciales. Notemos que si bien, en el nivel I se tiene un universo idéntico al nuestro, lo es sólo en la estructura, en como luce, sin embargo, el nuestro otro yo no es necesariamente como nosotros, ya que éste es igual a nosotros sólo en la parte de configuración física, i.e., apariencia, tipo de sangre, incluso el ADN, pero, las historias que pueden tener usted y su otro yo no tienen porque ser necesariamente iguales. Si tomamos el multiverso de tipo estadístico desde este punto de vista, tendríamos una prueba en este mismo lugar, en la tierra, pensemos en el caso de los hermanos gemelos idénticos, aunque en realidad no son 100 % iguales (no poseen las misma huellas digitales y a nivel celular son distintos), este es un experimento bastante curioso. Existen ciertas configuraciones idénticas hasta cierto nivel iguales las cuales nos permitiría pensar que nuestros otros yo no estarían tan lejos, pensemos que el ADN del ser humano sólo tiene una variación del 0.3 % y esto es lo que genera la diferencia de razas en todo el planeta, dentro de un nivel estadístico muy grosero todos los humanos en la faz de la tierra seríamos algo así como un psudo otro yo de los unos con los otros.

Quizás el último comentario le parezca absurdo, como podría ser una niña israelí o un anciano argentino algo cercano a mi otro yo, pero pensemos que 2 % es un error porcentual casi increíble para algunos experimentos de laboratorio y observacionales. Y más importante aun, es pensar en el hecho de que incluso a este nivel **todas las historias posibles han sucedido**, y para que estas lleguen a cruzarse (observarse unas con otras) tengamos que esperar lo suficiente.

3.2. Multiverso nivel II (multiverso de burbujas post inflacionarias)

Si se siente con un poco de dolor de cabeza y malestar estomacal debido a lo grande que fue el multiverso nivel I, trate de imaginar ahora un multiverso compuesto de infinidad de multiversos tipo I cada uno encerrado en una burbuja separados por el vacío falso, tal y como se ha mencionado en la sección (1.4) de inflación eterna. Como podemos notar este nivel de multiverso es generado por los más populares mecanismos de inflación, los cuales ya han sido mencionados en capítulos previos. Estos universos múltiples son más que infinitos en el sentido de que la comunicación entre ellos a través de ondas electromagnéticas es imposible debido a que el residen en distintos espacios-tiempo clásicos, separados por el vacío falso, el intentarlo sería el análogo de tratar de comunicarnos por sonido entre la luna y la tierra, no tiene sentido debido a que no hay medio de propagación de las ondas entre ambos entes.

Una representación artística de este nivel se muestra a continuación:

Como se ha mencionado anteriormente, los universos burbuja no aparentan ser burbujas (no son esféricos necesariamente) y tampoco poseen un orden tan simétrico, como el de la figura anterior, sin



Figura 3.2: Representación artística del multiverso nivel II, en los cuales se dibujan a los universos paralelos como esferas dispersas en un orden simétrico, lo cual es una representación errónea, una mejor representación se muestra en la página 20.

embargo, la representación es bastante ilustrativa, una representación un poco más fiel se muestra en la página 20.

El punto de vista común es que la física que observamos hoy en día es simplemente un límite de bajas energías de una teoría más general que se manifiesta a niveles de energía mucho más altos. Por ejemplo, esta teoría podría tener 10 dimensiones, ser supersimétrica y envolver la gran unificación de las 4 fuerzas fundamentales de la naturaleza. Una característica común de estas teorías es que la energía potencial del campo(s) relevante(s) para inflación tiene distintos mínimos, los cuales terminan generando distintos leyes de bajas energías (sección 1.4.3). Las fluctuaciones cuánticas durante el periodo de inflación pudieron causar diferentes burbujas post inflacionarias del nivel II de multiverso, las cuales posean diferentes leyes de la física como podrían ser diferente dimensionalidad o diferentes tipos de partículas elementales, como 2 en lugar de 3 generaciones de quarks.

Además de la dimensionalidad y del tipo de partículas que posee en él, el universo también está caracterizado por sus constantes físicas, como por ejemplo, la relación de la masa del protón y del electrón $m_p/m_e \approx 1836$ y la constante cosmológica, la cual aparenta ser del orden de 10^{-123} en unidades de Planck, los cuales también están propensas a cambiar en estos modelos.

De manera resumida el multiverso de nivel II es mucho más diverso y rico que el multiverso nivel I, conteniendo no sólo condiciones iniciales distintas, sino también, podría tener partículas elementales, dimensionalidad y constantes físicas diferentes.

Ésta es un área de la investigación muy activa [5-28]. La teoría de cuerdas (el "paisaje") predice, como ya se mencionó (página 23) que quizás existen 10^{500} mínimos diferentes, los cuales incrementan la diversidad de este nivel de multiverso, generando subniveles del mismo:

- **IId:** Diferentes formas en la cuales el universo de puede compactar, las cuales podrían permitir tanto simetrías diferentes, así como dimensionalidad diferente.
- **IIC:** Diferentes "flujos"(campos generalizados), los cuales estabilizan a las dimensiones extras (este es el subnivel más grande en número quizás llegando a los 10^{500})
- **IIb:** una vez que estas dos opciones se han sucedido, puede haber un puñado de mínimos diferentes en el potencial de supergravedad eficaz
- **IIa:** El mismo mínimo y las mismas leyes de la física en diferentes burbujas posinflacionarias.

3.2.1. ¿Cómo serían los multiversos nivel II?

Como se ha mencionado los multiversos nivel II pueden ser muy diversos, podrían contener partículas distintas, leyes y constantes físicas diversas e increíbles para nosotros. La pregunta de cómo serían estos lugares es bastante difícil de contestar. Existe una cantidad enorme de posibilidades y nosotros sólo tenemos un puñado de ideas de los que podría pasar en esos lugares (claro está, si estos existen). Para tener una idea más clara de que podría pasar en cada posible burbuja, nos apoyaremos en las siguientes gráficas

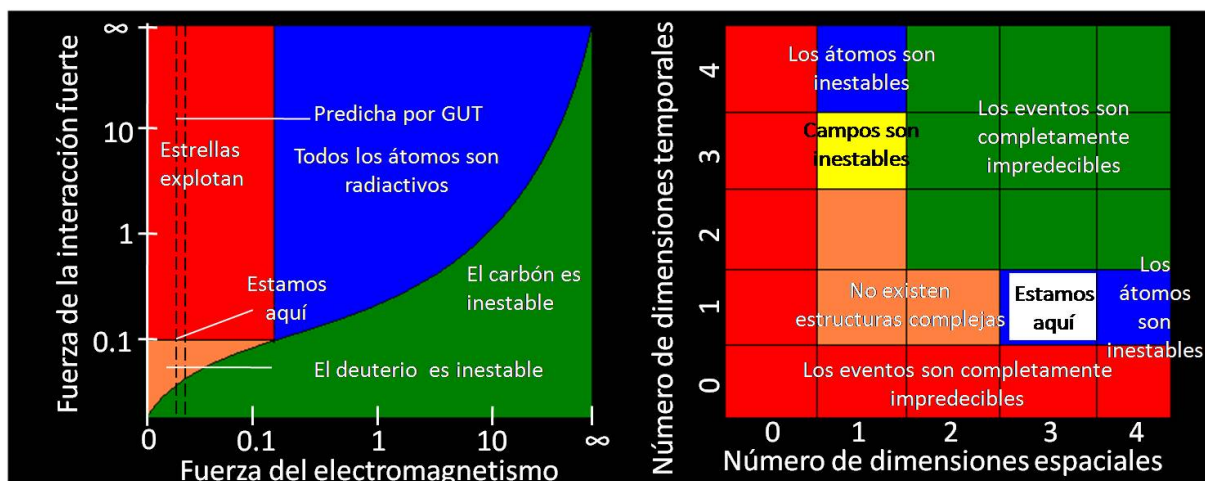


Figura 3.3: Se hace el contraste de los posibles escenarios con respecto a la relación entre la magnitud de la interacción fuerte y la interacción electromagnética, en la gráfica de la derecha se muestran los escenarios posibles conforme al número de dimensiones espaciales y temporales.

Notemos como el acontecer de cosas relativamente simples en este modelo reta a nuestras ideas y a nuestra imaginación, debido a que estos escenarios son muy diferentes a lo que ocurre en nuestro universo, sin embargo, son sólo pequeñas variaciones de lo que nos ofrece este modelo.

Con respecto a encontrar a su otro yo en este nivel, pues bien, es plausible encontrar a su otro yo en una misma burbuja, y en encontrarlo en otro es también probable, debido al número tan grande de universos burbujas. Sin embargo, el punto fino en estas ideas es si la vida puede existir en otros escenarios, por ejemplo, los materiales orgánicos se basan en carbono, sin embargo en las gráficas de arriba se muestra una región en la cual el carbono es inestable. Pensemos que pasaría con usted si su estructura fuese inestable, simplemente no existiría si el tiempo de vida media fuese muy corto, eso no es muy alentador ¿verdad?, o el estar constituidos por átomos radiactivos, wow!!, quizás esto nos sea casi imposible de vislumbrar, pero algo que sí podemos asumir es lo siguiente: la vida como usted y yo la conocemos no podría existir en otro universo muy distinto al nuestro (incluso quizás no podría existir en uno ligeramente distinto). Sin embargo, si algo hemos aprendido a lo largo del ínfimo tiempo que hemos existido, **es que la naturaleza está llena de sorpresas.**

3.3. Multiverso nivel III (multiverso tipo cuántico)

Si bien el multiverso nivel I puede ser un dolor de cabeza, no es tan irreal y tan controversial como el que ahora analizaremos.

El multiverso nivel III es quizás el más controversial de todos los multiversos, es llamado también el multiverso de tipo cuántico y recibe este nombre debido a que se llega a este modelo mediante un estudio de la teoría cuántica desde la parte fundamental. Este modelo fue propuesto por Hugh Everett III [32, 84] en la segunda mitad de los 50's del siglo pasado. Para explorar y entender este modelo es necesario inmiscuirnos en la teoría generada por el mismo Everett.

3.3.1. Mecánica cuántica

Es bien sabido que dentro del amplio marco de la física hoy en día, la mecánica cuántica es una de las teorías más contraintuitivas que existen hoy. Echemos un vistazo a lo que la mecánica cuántica nos arroja a partir de un análisis simple y abordando uno de sus más grandes problemas, el proceso de medición.

De manera formal en mecánica cuántica, el resultado de una medición es un elemento de una superposición de vectores. Cada uno representando una cantidad a ser posiblemente observada. La pregunta es muy sencilla "¿Cómo podemos conciliar la superposición con valor único obtenido en el experimento?" y "¿cómo el instrumento de medición puede afectar con el valor observado?"

Existen tres propuestas principales para resolver este problema: las variables ocultas, el colapso de la función de onda y la interpretación de muchos mundos. Nos enfocaremos en sólo una de ellas (la interpretación de muchos mundos de la mecánica cuántica), la cual nos da una imagen en la cual el universo se desdobra en múltiples universos, inobservables unos de otros. Es esta prácticamente la esencia del multiverso nivel III. Para adentrarnos en este modelo, debemos estudiar la interpretación de la mecánica cuántica dada por Hugh Everett III [85].

3.3.2. Teoría cuántica de la medida

En su forma más simple de la teoría de la medición cuántica, el mundo se divide en dos entidades dinámicas: un sistema y un aparato. Ambos están sujetos a las leyes de la mecánica cuántica, y además están combinadas en un estado que puede ser expresado en términos de una base ortonormal

$$|s, A\rangle = |s\rangle|A\rangle, \quad (3.1)$$

donde s es un eigenvalor de algún sistema observable y A es un eigenvalor de algún aparato observable.

La estructura del producto cartesiano de la ecuación (3.1) refleja una suposición implícita, que bajo las condiciones apropiadas, tales como la ausencia de acoplamiento, el sistema y el aparato, pueden actuar como si fueran aislados, independientes y distinguibles. También es conveniente el suponer que los eigenvalores s toman valores discretos y que los eigenvalores de A toman valores continuos.

Supongamos que el estado del mundo en algún instante inicial, está representado por un vector normalizado de la forma

$$|\Psi_0\rangle = |\psi\rangle|\Phi\rangle, \quad (3.2)$$

donde $|\psi\rangle$ se refiere al sistema y $|\Phi\rangle$ al aparato. En este estado, el sistema y el aparato se dicen "no correlacionados". Para que el aparato pueda tener información del sistema, estos deben de acoplarse por un cierto tiempo, en el cual la representación (3.2) no se cumple. El resultado final de el acoplamiento será descrito por la acción de un cierto operador lineal U

$$|\Psi_1\rangle = U|\Psi_0\rangle. \quad (3.3)$$

Debido a que el aparato observa al sistema y no al revés, es necesario elegir un operador de acoplamiento U que refleje esta separación de funciones. Teniendo U la siguiente acción sobre la base vectorial definida en 3.1 (o en una base semejante):

$$U|s, A\rangle = |s, A + gs\rangle = |s\rangle|A + gs\rangle, \quad (3.4)$$

donde, g es una constante de acoplamiento, la cual puede asumirse que es ajustable. Si el estado inicial del sistema fue $|s\rangle$ y el del aparato fue $|A\rangle$ este acoplamiento fue el resultado de una observación, efectuada por el aparato, en la que el sistema observable tuvo un valor s .

Esta observación o "medición", puede ser tomada como "almacenada" en la "memoria" del aparato en virtud del cambio permanente de $|A\rangle$ a $|A + gs\rangle$ en el estado del aparato.

3.3.3. Regresión infinita

Consideremos ahora que pasaría con el estado inicial en la ecuación (3.2) como el resultado del proceso de medición de la ecuación (3.4). Usando la ortonormalidad y asumiendo la completitud de la base vectorial, podemos encontrar fácilmente que

$$|\Psi_1\rangle = \sum_s c_s |s\rangle |\Phi[s]\rangle, \quad (3.5)$$

donde

$$c_s = \langle s | \psi \rangle, \quad (3.6)$$

$$|\Phi[s]\rangle = \int |A + gs\rangle \Phi(A) dA, \quad (3.7)$$

$$\Phi(A) = \langle A | \Phi \rangle. \quad (3.8)$$

El estado final en la ecuación (3.5) no representa el sistema observable con un valor único, de hecho, $|\psi\rangle$ pasa a ser uno de los elementos de la base vectorial $|s\rangle$. Clasificando esto como una superposición lineal de vectores $|s\rangle |\Phi[s]\rangle$, donde cada uno de los cuales representa al sistema observable cuando ha asumido uno de los posibles valores y el aparato a medido dicho valor. Para cada posible observación, tendremos una buena observación, esto es, con capacidad de distinguir valores adyacentes a s , si

$$\Delta A \ll g\Delta s, \quad (3.9)$$

donde Δs es el espaciamiento entre los valores adyacentes y ΔA es la varianza en A sobre su valor medio relativo de la función de distribución $|\Phi(A)|^2$. Bajo estas condiciones tenemos

$$\langle \Phi[s] | \Phi[s'] \rangle = \delta_{ss'}. \quad (3.10)$$

En otras palabras, la función de onda del aparato toma la forma de un paquete que inicialmente está compactado pero que después se desdobra como un resultado de un acoplamiento con el sistema, dentro de una multitud de paquetes mutuamente ortogonales, uno para cada valor de s .

Es aquí donde la controversia sobre la interpretación de la mecánica cuántica comienza. Para la mayoría de las personas, un estado como el de la ecuación (3.5) no representa lo que ocurre en una observación. Ellos consideran que el aparato tiene una especie de estado esquizofrénico: en el cual no se puede decidir qué valor se ha de encontrar para el sistema observable. Al mismo tiempo, no podemos negar que el acoplamiento elegido entre el sistema y el aparato debería, en la teoría clásica, llevar de la mano a un valor de salida definitivo. Por lo cual se enfrentan a una crisis ya que ¿Cómo se puede describir el aparato con esta mentalidad?

La sugerencia usual es la de introducir un segundo aparato, para llegar a los hechos, simplemente mirando el primer aparato para ver lo que ha registrado. Sin embargo, haciendo un análisis rápido a lo sugerido anteriormente, nos arroja que la situación del segundo aparato no es mejor que la del primero. El segundo aparato también se va a un estado de esquizofrenia. Y pensándolo de manera sucesiva, esto pasará también con un tercero, cuarto, . . . ,etc. Esta cadena es conocida como, "la catástrofe de la regresión infinita de von Neumann"[86].

3.3.4. Cambiando las reglas

Esencialmente existen tres formas distintas de salir de la crisis.

■ El cambio de la teoría

Cambiar las reglas del juego, mediante un cambio de la teoría misma. Eugene Wigner [87] es el representante más distinguido de este método. Tomando una posición antropocéntrica, donde se propone que la entrada de la señal de medida en la conciencia de un observador es lo que dispara la elección y rompe con la cadena. Ciertamente la cadena será rota en este punto, debido a que es dentro del cerebro humano donde la secuencia laboratorio-medición termina.

Wigner mostro una posible descripción matemática de la conversión de un estado mixto puro, el cual podría producirse como el resultado de una desviación a groso modo de la ecuación de Schrödinger, que él creía que debía ocurrir cuando se entraba conscientemente en escena. El también propone la búsqueda de efectos inusuales de actos conscientes sobre la materia.

Otra propuesta es la dada por David Bohm [88, 89], que a diferencia de Wigner, no buscaba un cambio de la teoría a nivel de conciencia. Bohm y su escuela, querían cambiar los fundamentos a tal punto que el aparato estuviese curado de la esquizofrenia. Esto lo hicieron mediante la introducción de "las variables ocultas". Esta primer solución funciona pero no hay forma de hacer la distinción experimental con respecto a la mecánica cuántica convencional.

■ El colapso de Copenhagen

El segundo método para escapar de la catástrofe de von Neumann es el aceptar la llamada interpretación "usual" o "interpretación de Copenhagen" de la mecánica cuántica (la refencia [90] posee una lista de artículos selectos sobre este tema). La gran dificultad de tratar con este método que también trata de cambiar las reglas del juego, pero que a diferencia de Wigner y Bohm, pretenden que no lo hacen.

De acuerdo con la interpretación de Copenhagen, cada vez que el estado del sistema alcanza una forma como en la ecuación (3.5) inmediatamente colapsa. La función de onda que consiste en una multitud de paquetes, se reduce a un sólo paquete, y el vector $|\Psi_1\rangle$ se reduce a un elemento correspondiente de la superposición $|s\rangle|\Phi[s]\rangle$.

■ El meta-teorema EWG

Ahora bien, ¿Qué tal si olvidamos todas las ideas metafísicas y comenzamos nuevamente en el punto en el que Heisenberg se encontraba en 1925? Obviamente no podemos olvidarlo todo; será inevitable el uso de 84 años de retrospectiva en el intento de reestructurar nuestra interpretación de la mecánica cuántica. Sin embargo, mediante este método se trata de:

- Tomar el formalismo matemático de la mecánica cuántica como está sin agregarle nada más.
- Negar la existencia de un campo clásico aparte.
- Afirmar que el estado vectorial nunca colapsa.

En otras palabras, ¿Qué pasa si decimos que el formalismo lo es todo? ¿Nos podemos salir con la nuestra? La respuesta es que sí podemos. La prueba de esta aseveración fue dada primero en 1957 por Hugh Everett III con el apoyo de John Wheeler[91], y subsecuentemente fue elaborada por R. Neil Graham [92]. Esto constituye la tercer forma de salir de la crisis propuesta por von Neumann [86].

Everett, Wheeler y Graham (EWG), postularon que en el mundo real, o cualquier parte aislada del mismo, está representada fielmente sólo por el siguiente objeto matemático: un vector en el espacio de Hilbert y un conjunto de relaciones de conmutación para los operadores (derivados de los brackets de Poisson de la teoría clásica mediante las reglas de cuantización, donde su análogo clásico existe). Sólo necesitamos un postulado adicional para dar un sentido físico a las matemáticas. Este es el postulado de la complejidad: *El mundo debe de ser lo suficientemente complicado de tal forma que se pueda descomponer en sistemas y aparatos.*

Sin recurrir a la metafísica o matemáticas externas a las reglas estándar de la lógica, EWG es viable utilizando estos postulados, se prueba el siguiente meta-teorema: *El formalismo matemático de la teoría cuántica es capaz de ofrecer su propia interpretación.* Para probar este meta-teorema, EWG debe contestar 2 cuestiones:

- ¿Cómo puede la interpretación probabilística usual emerger del formalismo en sí?
- ¿Cómo se puede dar una correspondencia con la realidad si el estado vectorial nunca colapsa?

Para dar respuesta a esto debemos introducirnos a la teoría generada por el mismo Everett en 1957 [32].

3.3.5. La teoría de la función universal de onda

Para introducirnos a la teoría de Everett, comenzaremos utilizando una interpretación particular de la teoría cuántica la cual es la forma más común encontrada en los libros de texto y notas universitarias sobre el tema.

Un sistema físico se encuentra descrito completamente por una función de estado ψ , la cual es un elemento de un espacio de Hilbert y sólo nos da las probabilidades de los resultados que se pueden obtener al realizar una medición (observación) sobre el sistema. La función de estado ψ se puede pensar como una caracterización objetiva del sistema físico, es decir, todo sistema aislado posee una función de onda independientemente de lo que se conozca sobre el sistema en sí. Por otro lado, ψ cambia de manera causal mientras el sistema se mantenga aislado, obedeciendo una ecuación diferencial.

Estas son las dos formas diferentes en la que la función de onda puede cambiar:

Proceso 1: El cambio discontinuo dado por la observación de una cantidad con estados ϕ_1, ϕ_2, \dots , en la cual es estado ψ cambiará al estado ϕ_j con probabilidad $|(\psi, \phi_j)|^2$.

Proceso 2: El continuo, el cambio determinista del estado del sistema aislado con el tiempo de acuerdo con la ecuación $\frac{\partial \psi}{\partial t} = U\psi$, donde U es un operador lineal.

Asumiendo la validez universal de la descripción cuántica, mediante el completo abandono del proceso 1. La validez general de la mecánica ondulatoria pura, fuera de toda aseveración estadística, es asumiendo que para todo sistema físico, incluyendo observadores y aparatos de medición, los procesos de observación son completamente descritos por la función de estado del sistema compuesto los cuales incluyen al observador y su sistema, y los cuales obedecen en todo momento la ecuación de onda (el proceso 2).

Esta breve lista de alternativas si bien no es exhaustiva, ha presentado el espíritu de una orientación preliminar. De hecho, hemos omitido una de las principales interpretaciones de la teoría cuántica, la posición de Niels Bohr.

La teoría de Everett se basa en la última alternativa y utilizando un modelo puramente ondulatorio llega a una reformulación de la mecánica cuántica (obviamente dentro de su marco lógico) y es dentro de esta reformulación en la cual él encuentra un resultado que se puede interpretar como la existencia de universos paralelos.

Usando un aparato matemático basado en probabilidad, información y correlaciones, el cual aplica para demostrar algunos resultados de la mecánica cuántica, Everett expone un resultado llamado producción de correlación mediante un ejemplo de medición dado por von Neumann, el cual dice:

Supongamos que tenemos un sistema de una sola coordenada, q , y un aparato de una coordenada r . Además suponga que son inicialmente independientes ($p, q = 0$, i.e., su correlación es igual a cero), así que la función de onda combinada es $\psi_0^{A+S} = \phi(q)\eta(r)$, donde $\phi(q)$ y $\eta(r)$ son las funciones de onda iniciales del aparato y del sistema respectivamente. Finalmente suponga que las masas son lo suficientemente grandes o el tiempo de interacción lo suficientemente pequeño como para que la energía cinética sea despreciable, así que durante el tiempo de medición el hamiltoniano sólo consistirá de una interacción la cual tomaremos como:

$$H_I = -i\hbar q \frac{\partial}{\partial r}. \quad (3.11)$$

Así es fácil verificar que el estado $\psi_t^{S+A}(q, r)$:

$$\psi_t^{S+A}(q, r) = \phi(q)\eta(r - qt), \quad (3.12)$$

es una solución de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t^{S+A}}{\partial t} = H_I \psi_t^{S+A}, \quad (3.13)$$

Tomando $t_0 = 0$, tenemos

$$P_t(q, r) = P_1(q)P_2(r - qt), \quad (3.14)$$

donde $P_1(q) = \phi^*(q)\phi(q)$, $P_2(r) = \eta^*(r)\eta(r)$ y $P_t(q, r) = \psi_t^{(S+A)*}(q, r)\psi_t^{S+A}(q, r)$. Notemos además que para un cierto tiempo, t , la distribución condicional de la amplitud al cuadrado para r ha sido movida en una cantidad dependiente de el valor de q , mientras que la distribución marginal para q se mantiene inalterada. Vemos que ha sido introducida una correlación entre q y r debido a esta interacción, lo cual nos lleva a interpretarlo como una medición. Es instructivo el ver que tan rápido toma lugar esta correlación. Notemos que (ver apéndice IV):

$$\begin{aligned} I_{QR}(t) &= \int \int P_t(q, r) \ln P_t(q, r) dq dr \\ &= \int \int P_1(q)P_2(r - qt) \ln P_1(q)P_2(r - qt) dq dr \\ &= \int \int P_1(q)P_2(\omega) \ln P_1(q)P_2(\omega) dq d\omega \\ &= I_{QR}(0) \end{aligned}$$

así que la información de la distribución conjunta no cambia. Más aún, dado que la distribución marginal de q no cambian en el tiempo:

$$I_Q(t) = I_Q(0), \quad (3.15)$$

y la única cantidad la cual puede cambiar es la información marginal, I_R , de r , cuya distribución es:

$$P_t(r) = \int P_t(r, q) dq = \int P_1(q)P_2(r - qt) dq \quad (3.16)$$

Aplicando la desigualdad especial [32] siguiente a (3.16):

$$I_R(t) \leq I_Q(0) - \ln t, \quad (3.17)$$

así que, exceptuando por la constante aditiva $I_Q(0)$, la información marginal I_R tiende a decrecer tan rápido como el $\ln t$ con el tiempo de duración de la interacción. Esto implica que para la correlación:

$$\{Q, R\}_t = I_{QR}(t)I_Q(t)I_R(t) \geq I_{RQ}I_Q(t)I_Q(0) + \ln t \quad (3.18)$$

Pero a $t = 0$ la distribución para R y Q era independiente, así que $I_{RQ}(0) = I_R(0) + I_Q(0)$. Substituyendo esto en la ecuación (3.18), obtenemos que:

$$\{Q, R\}_t \geq I_R(0)I_Q(0) + \ln t. \quad (3.19)$$

Por lo tanto la correlación tiene un crecimiento a lo menos logarítmico, excepto por una constante aditiva representando la diferencia de la información de las informaciones de las distribuciones iniciales $P_2(r)$ y $P_1(q)$. Dado que la correlación tiende a infinito conforme crece el tiempo, y la distribución marginal del sistema no cambia, la interacción dada en (3.11) satisface nuestra definición de una medición de q sobre r .

Pensando en que el aparato no indica ningún valor definitivo del sistema (dado que no hay estados independientes del sistema o del aparato) podemos mirar la función de onda total (3.12) como una superposición de estados de un par de subsistemas, en el cual cada elemento tiene definido q valores y un correspondiente estado de aparato desplazado. Esto se puede escribir como:

$$\psi_t^{A+S} = \int \phi(q')\delta(q - q')\eta(r - q't)dq', \quad (3.20)$$

la cual es una superposición de estados $\psi_{q'} = \delta(q - q')\eta(r - q't)$. Cada uno de estos, $\psi_{q'}$, de la superposición describen un estado en el cual el sistema toma el valor definido $q = q'$, y en el cual el aparato tiene un estado el cual está desplazado de su estado original en $q't$. Estos elementos $\psi_{q'}$ están superpuestos con coeficientes $\phi(q')$ para formar el estado total (11).

Recíprocamente, transformamos la representación donde el aparato está definido y escribimos (3.12) como:

$$\psi_t^{S+A} = \int \left(\frac{1}{N_{r'}}\right) \xi^{r'}(q)\delta(r - r')dr' \quad (3.21)$$

donde

$$\xi^{r'}(q) = N_{r'}\phi(q)\eta(r' - qt)$$

y

$$\left(\frac{1}{N_{r'}}\right)^2 = \int \phi^*(q)\phi(q)\eta^*(r' - qt)\eta(r - qt)dq.$$

donde la $\xi^{r'}(q)$ es la función de estado del sistema relativo para el estado del aparato $\delta(r - r')$ de valor $r = r'$.

Notemos que estos estados del sistema en relación, $\xi^{r'}(q)$, es cercana a los eigenestados para los valores $q = r'/t$, si el grado de correlación entre q y r es suficientemente alto, i.e., si es suficientemente grande, o $\eta(r)$ es lo suficientemente agudo (cercano a $\delta(r)$) entonces $\xi^{r'}(q)$ es casi $\delta(q - r'/t)$.

Esta propiedad, de que los estados del sistema relativo se pueden volver aproximadamente eigenestados de la medición, es de hecho común en todas las mediciones.

Dado que $Exp[I_Q^r] = I_Q + Q, R$, y que I_Q se mantiene constante mientras Q,R tiende a su máximo (o infinito) durante la interacción, tenemos por consiguiente que $Exp[I_Q^r]$ tiende entonces a su máximo (o infinito). Pero I_Q^r es sólo la información en los estados del sistema relativo, el cual adoptamos como medida de la cercanía con un eigenestado. Por lo tanto, al menos en expectación, el estado del sistema relacionado se aproxima a eigenestados.

Hemos visto que (3.21) es una superposición de estados, para cada uno de los cuales el aparato tiene un valor definitivo r' , y el sistema se queda en aproximadamente el eigenestado de la medición correspondiente a $q = r'/t$. El salto discontinuo entre eigenestados es sólo una proposición relativa, dependiente de nuestra descomposición de la función de onda de la superposición, y relativo a una elección particular de los valores del aparato. *Así que por lo que a la teoría concierne todos los elementos de la superposición existen simultáneamente, y el proceso entero es continuo.*

Para cerrar con la teoría que propuso Everett, nos enfocaremos en la interpretación ondulatoria de la mecánica cuántica, la cual propuso y defendió, en la cual se afirma que la función de onda en sí misma es una entidad fundamental, obedeciendo en todo momento una ecuación determinista de onda.

La interpretación ondulatoria: Esta es la proposición tomada por Everett III, en la cual la función es tomada en sí como una entidad fundamental, obedeciendo en todo momento una ecuación de onda determinista.

Esta visión además corresponde de manera más cercana con lo que Schrödinger. Sin embargo, esta representación sólo toma sentido cuando el proceso de observación en sí es tratado dentro de la teoría. Es sólo de esta manera que la aparente existencia de objetos macroscópicos concretos, así como fenómenos localizados, tales como trayectorias en una cámara de niebla, pueden ser explicadas satisfactoriamente en una teoría de ondas donde las ondas son difuminadas continuamente.

Con la deducción hecha en esta teoría en la que los fenómenos están aparentemente sujetos al proceso 1, la crítica de Heisenberg sobre la opinión de Schrödinger -el mecanismo de onda continua no puede explicar las discontinuidades observadas en todos lados- puede ser al fin contestada. Los saltos cuánticos existen en nuestra teoría como fenómenos relativos (i.e. estados de un objeto-sistema relativo al elegir estados de observador), mientras que el estado absoluto cambia de manera continua.

En el caso de la observación de un sistema de un par de sistemas correlacionados espacialmente separados, no ocurre nada con el sistema remoto al hacer cualquiera de sus estados más real que el resto. No teniendo estados independientes para comenzar, pero teniendo un cierto número de estados ocurriendo en una superposición con estados correspondientes para el otro sistema (cercano). La observación del sistema cercano correlaciona al observador con este sistema, un proceso puramente local. Pero un proceso el cual implica también una correlación automática con el sistema remoto. Cada estado del sistema remoto sigue existiendo con la misma amplitud en una superposición, pero ahora es una superposición en cual los elementos están contenidos, en adición con la correlación de un estado del sistema remoto y de un estado del sistema cercano, un estado observador el cual describe a un observador el cual percibe el estado del sistema cercano. Desde el punto de vista presente todos los elementos de esta superposición son igualmente reales. Sólo el estado del observador ha cambiado, debido a que se ha correlacionado con el estado del sistema cercano y por lo tanto naturalmente con el sistema remoto también. El ratón no afecta el universo sólo el ratón es afectado-.

3.3.6. ¿Cómo serían los multiversos nivel III?

Si la teoría de Everett es correcta, entonces el tercer tipo de universos paralelos no está muy lejos de nosotros. El universo mismo se desdoblaría en universos paralelos como se muestra en la figura.

Este es el multiverso de nivel III, y como he mencionado al principio, este es el más controversial y como veremos más adelante no aporta ningún tipo de universo nuevo.

La interpretación de muchos mundos de Everett ha estado perturbado mentes dentro y fuera de la física por más de cinco décadas. Pero en sí la teoría se facilita una vez que se distingue entre dos puntos de vista diferentes de una teoría física:

- El punto de vista de la física que estudia las ecuaciones matemáticas, como un ave que está sobrevolando el paisaje
- El punto de vista de la física del observador limitado al mundo que describen estas ecuaciones, como una rana que vive en el paisaje que sobrevuela el ave.

Desde la perspectiva del ave, el multiverso nivel III es simple. Hay sólo una función de onda, la cual evoluciona suave y deterministamente, sin ningún tipo de desdoblamiento o paralelismo. El mundo cuántico abstracto descrito por esta función de onda, contiene un vasto número de líneas historias clásicas paralelas, las cuales continuamente se desdoblán y encuentran.

Desde la perspectiva de la rana, se observa sólo una pequeña fracción de la realidad como un todo. Sólo podemos ver nuestro propio multiverso nivel I, debido a que el proceso de decoherencia previene que podamos ver nuestras copias de multiverso nivel III.

Cada vez que se le hace una pregunta, toma una decisión rápida (aunque no siempre) y da una respuesta, los efectos cuánticos en su cerebro dan lugar a una superposición de resultados, tales como

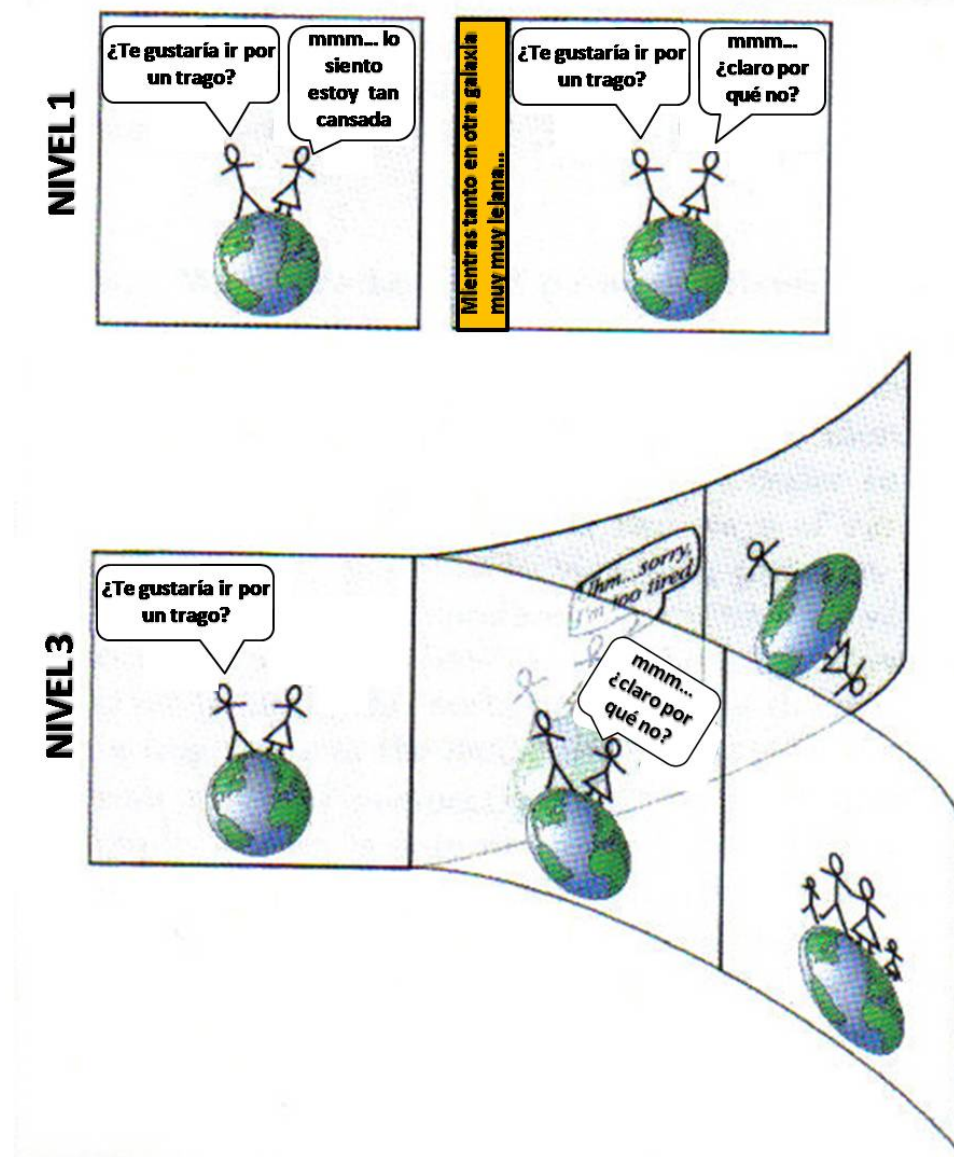


Figura 3.4: Contraste del tipo de universos dentro de los niveles I y III

“dejar de leer este trabajo” o “continúa leyendo este trabajo”. Desde la perspectiva del ave, el acto de tomar una decisión hace que la persona se desdoble en múltiples copias de sí misma, la cual una de ellas dejara de leer este trabajo y la otra continuara leyendo. Desde la perspectiva de la rana, sin embargo, cada uno de estos alter egos es ignorado por el otro y toma la bifurcación como una mera arbitrariedad: una cierta probabilidad de continuar leyendo o no.

En estos multiversos en sí no hay nada nuevo en el aspecto de la física, sin embargo, hay una infinidad de variaciones entre unos y otros debido a las bifurcaciones generadas por la elecciones tomadas a lo largo del tiempo.

3.3.7. El hubiera sí existe

En este nivel de multiverso, a diferencia del caso anterior, tenemos una infinidad de entes distintos existiendo cada cual en el mismo espacio-tiempo pero nuestros otros yo no están muy lejos de nosotros mismos. En este multiverso las cosas suceden de manera muy distinta, su otro yo está justo en el mismo

lugar que usted pero reside en otra realidad, esto es así, si recordamos la teoría de Everett III en la cual la mecánica cuántica es válida para todo ente en el universo, no sólo a escalas microscópicas. Dentro de este marco lógico, los eigenestados no desaparecen al efectuar una medición, sino que, estos se mantiene teniendo igual amplitud dentro de una superposición de onda, y en palabras mismas de Everett, son igualmente reales; entonces, usted y todo en este universo se vería afectado por este principio. Así que cuando usted tenga que efectuar alguna decisión (observación de un fenómeno, como elegir un camino ó tomar alguna decisión en general) resulta que usted no tomará sólo una y el resto se desvanecerán (como lo plantea la idea del colapso de la función de onda), sino que usted tomará todas las posibles elecciones mediante un desdoblamiento de la realidad.

En un ejemplo sencillo, suponga que usted camina por un sendero en línea recta, hasta que en determinado momento se encuentra con la encrucijada de tomar dos caminos divergentes (una Y en el camino) y sólo tiene dos posibilidades, izquierda o derecha. De acuerdo con el modelo de Everett, si usted opta por la izquierda, eso no implica que la decisión de irse hacia la derecha haya quedado fuera, simplemente significa que las realidades de las dos posibilidades se han separado, es decir, la realidad se ha desdoblado, y usted ha elegido la izquierda, pero su otro yo ha elegido la derecha.

En otras palabras, el concepto de realidad como tal se ve afectado por las decisiones tomadas a lo largo del tiempo, es decir, que lo que para usted es la realidad, con sus momentos felices y trágicos, no es más que la combinación directa de las elecciones que usted ha tomado. Sin embargo, esto no implica que el resto de posibles decisiones no hubiesen tenido lugar, quizás, usted conoció a su pareja en un baile al cual lo invitó un amigo. Por otro lado, usted tuvo la elección de no ir a ese lugar, así que existe otra realidad (otro universo) en el que usted y su pareja, desconocen la existencia del otro, un universo en el que usted se apellida Jackson y sabe cantar pop, donde su abuelo fue pionero en la era espacial y donde su padre es campeón mundial de los pesos pesados.

Las expresiones, quizás, hubiera, podría ser, entre muchas otras hoy toman un sentido muy distinto al que usualmente le damos.

3.4. Multiverso nivel IV (multiverso matemático)

Recordemos las perspectivas de la rana y el ave, presentadas en la sección (3.3.6), y cuáles son los enfoques de cada una de ellas. Ahora bien, mediante estas perspectivas se presentan dos paradigmas opuestos acerca de lo que es en sí misma la física y el cómo estudiarla [4].

- **PARADIGMA ARISTOTELICO.** Este paradigma sugiere que la perspectiva de la rana es la correcta, es decir, que la física verdadera es ésta y que, la perspectiva del ave y todo su lenguaje matemático, no es más que una aproximación bastante útil.
- **PARADIGMA PLATONICO.** Este paradigma sostiene que la perspectiva del ave (la estructura matemática) es la correcta, y que la perspectiva de la rana, así como la del humano en sí, no es más que una descripción subjetiva de lo que en realidad está pasando

Entonces preguntémosnos, ¿Qué es más fundamental? ¿la perspectiva del ave o la de la rana? ¿Qué es más básico? ¿la percepción humana o el lenguaje matemático? La respuesta que usted dé a continuación determinará su sentir con respecto al multiverso. De elegir al paradigma aristotélico por encima del platónico, esto implica que usted no está muy a gusto con el multiverso y tiene problemas en creer en éstos debido a que derivan de teorías "controversiales". En caso contrario, tomando como verdadero el paradigma platónico, entonces, encuentra a los multiversos como algo natural.

Una estructura matemática es algo en sí abstracto, una entidad inmutable existente fuera del tiempo y del espacio, como analogía, si la historia fuese una película, la estructura no correspondería a la pantalla, sino a todo el disco compacto en sí. Consideremos, por ejemplo, un mundo hecho de partículas puntuales moviéndose en espacios 3-dimensionales. En un espacio 4-dimensional -perspectiva del ave- las trayectorias de estas partículas asemejan a un espagueti enrollado. Si la rana ve una partícula moviéndose en línea recta a velocidad constante, el ave verá un espagueti crudo. Si la rana ve 2 partículas orbitando, el ave verá 2 espaguetis enrollados uno con el otro a forma de doble hélice. Para la rana el mundo está descrito por las leyes de Newton de gravitación y movimiento, para el ave está descrito por la geometría del

espacio-tiempo (la pasta dentro de nuestra analogía). Nuestro universo es mucho más complicado que este simple ejemplo, y los científicos no han encontrado aún que estructura matemática le corresponde.

De esta forma, basados en el paradigma de Platón, encontraremos un nuevo nivel de multiverso, el nivel IV o multiverso matemático. Este se basa completamente en el hecho de que la verdadera física es la que está dada por los sistemas matemáticos que rigen las observaciones, y la percepción misma del observador tiende a sólo ser aproximación subjetiva. Un ejemplo sencillo de esto es lo que pasa en la física cuántica, en la cual existen un sin fin de resultados contraintuitivos, los cuales están regidos por ciertos aparatos matemáticos. En otras palabras, toda la física se reduce en última instancia a un problema matemático, entonces todo lo que está en la perspectiva de la rana está dado por una ecuación fundamental dada por las matemáticas, el cosmos tal y como lo conoce la rana, no sería más que la proyección de un modelo matemático.

Siguiendo esta línea de ideas, entonces es fácil predecir el siguiente paso, si un modelo en particular está asociado a nuestro universo, de esta forma, todo modelo matemático está asociado a un universo, en otras palabras, cada modelo matemático generaría un universo independiente del nuestro con sus propias leyes fundamentales y su propia física.

Así de esta manera, si podemos programar en un algoritmo de computadora un modelo matemático completo, entonces es plausible el hecho de que con una computadora suficientemente poderosa se pueda incluso simular un universo tan complejo como el nuestro aunque no necesariamente con nuestras mismas constantes y leyes fundamentales, por lo cual las violaciones a nuestras leyes físicas son posibles dentro de esos universos [33].

En este punto tenemos entonces que la existencia de otros universos es tan extensa como la matemática en sí.

CONCLUSIONES

El multiverso es una idea asociada principalmente a la ciencia ficción y a la filosofía pura más por mero prejuicio que por razones concretas y fundamentadas. Con esta tesis se deja en claro que el multiverso ha dejado de ser sólo una idea, un modelo creado de la nada; se han enmarcado las principales teorías físicas que generan de manera natural un modelo de multiverso. Utilizando la clasificación de Tegmark, tenemos:

- **Nivel I (Configuraciones idénticas):** Utilizando física estadística y tomando en cuenta las fluctuaciones cuánticas, este modelo es el más fácil de aceptar. Se considera al universo como un volumen el cual alberga un número finito de constituyentes y por ende un número finito de configuraciones que pueden ser creadas con estos. La idea en sí es también respaldada por el universo de tamaño infinito predicho por relatividad general (para geometrías abiertas). Por lo cual si se tiene un número finito de configuraciones y un espacio infinito, entonces las configuraciones están destinadas a repetirse no sólo una sino una infinidad de veces.
- **Nivel II (Multiverso post-inflacionario):** Tomando como punto de partida los modelos de inflación eterna e inflación caótica, así como el paisaje de cuerdas, se tiene que en ambos modelos se generan ciertas regiones meta-estables de energía las cuales se denominan *vacío falso*. En estas regiones el campo escalar se mueve buscando un mínimo local, entonces cada vez que el campo de inflación pasa de un mínimo local a otro se produce un nuevo universo debido a que el vacío falso no desaparece; por otra parte, debido a que los rompimientos de la simetría las leyes de la física de bajas energías no son las mismas en cada universo de bolsillo generado de tal forma que tendremos universos con diferentes constantes fundamentales. Esta idea también se sustenta por el principio de ergodicidad en el cual se pregunta ¿Por qué las leyes de la física de nuestro universo son la propicias para nuestra existencia? Se llega a un escenario semejante mediante la cosmología cuántica, en el cual usando un modelo que considera un brana acoplada con un campo de Ramond-Ramond se induce la creación de universos. Para este modelo elegimos tres espacios de fondo distintos: el espacio plano, espacio de de Sitter y el espacio de anti de Sitter. La probabilidad de creación de universos depende de la constante cosmológica del espacio de fondo, la constante cosmológica del universo y el termino β (la cual es la constante de acoplamiento del campo de Ramond-Ramond).
- **Nivel III (Multiverso cuántico):** Este modelo de multiverso se basa en la interpretación de la mecánica cuántica de Hugh Everett III la cual fue propuesta en su tesis doctoral en 1957. Dentro de su marco lógico la función de onda, a diferencia de la interpretación de Copenhague, no colapsa sino que todas las posibilidades (una infinidad) son igual de reales, haciendo que todo el universo se desdoble en una infinidad de posibilidades. Cada decisión tomada genera un desdoblamiento, de tal forma que todas las historias posibles han ocurrido y cada opción en cada decisión ha ocurrido.
- **Nivel IV (Multiverso matemático):** Utilizando el razonamiento de por qué el universo es matemático este modelo toma como base este hecho, así como los paradigmas platónico y aristotélico, los cuales se enfocan en la cuestión de ¿qué es más fundamental, el lenguaje matemático o la percepción humana? ¿Cuál de estos dos es una aproximación del otro? Si tomamos al lenguaje matemático como el que verdaderamente describe al universo, entonces, todo modelo matemático completo generaría un universo con sus propias leyes por más absurdas que nos parecieran a nosotros. Se violarían leyes físicas porque en las leyes de ese universo esas "violaciones" están permitidas y la cantidad de universos posibles sería tan grande como la matemática misma.

En otras palabras, el multiverso ya no es un modelo, es una predicción de nuestros modelos. Son estos modelos a los que estamos tratando de probar en los grandes aceleradores de partículas (como sería el caso de dimensiones extra) o con los costosos satélites que enviamos al espacio para observar la radiación cósmica de fondo (en el caso de inflación, a la cual las observaciones del COBE y WMAP han sido de gran apoyo), o de teorías que han sido usadas desde hace ya medio siglo con avances tecnológicos impresionantes, sin saber cómo es que funcionan las cosas (me refiero a la teoría cuántica y sus fundamentos), o modelos que aceptamos porque funcionan con un simple cambio de escala (de lo micro a lo macro), como en el caso de la física estadística.

De manera general, son estos los modelos que sustentan cada uno a su propia teoría multiversal, todas teorías aceptadas y usadas en la física de hoy en día sin ningún pero. De tal manera que el hecho de negar al multiverso como una especulación por el simple hecho de no verlo, no es una razón de peso para negar su existencia. La relatividad general ha predicho la existencia de lentes gravitacionales, precesión del perihelio de mercurio, dilatación del tiempo en un campo gravitacional, agujeros negros, etc. Sin embargo, la teoría de relatividad general también predice ondas gravitacionales, las cuales hasta hoy en día no han sido detectadas, sin embargo se siguen invirtiendo recursos para comprobar que esta consecuencia es cierta. En el caso de la teoría de inflación, sus predicciones han sido confirmadas por el satélite WMAP, este modelo predice el multiverso de manera natural (como pasa con las ondas gravitacionales en relatividad general), por lo cual no hay razón a priori para negar la existencia del multiverso.

Basado en cosmología cuántica, se ha tomado un modelo en el cual el universo se crea mediante la introducción del campo de Ramond-Ramond [38], en el cual se encuentra la probabilidad de nucleación de un universo de acuerdo al tipo de espacio de fondo. También se ha comparando las probabilidades de creación en un espacio de deSitter, Anti-deSitter y plano.

Se ha encontrado que para este modelo, existen dos factores importantes ligados a la razón de nucleación (2.8). El primero es el factor denominado como β , el cual es la constante de acoplamiento del campo de Ramond-Ramond, para el cual cuando este parámetro aumenta o disminuye, la probabilidad de creación aumenta o disminuye independientemente del espacio de fondo y sin perder su comportamiento asintótico. El segundo es el factor Λ . El espacio dS posee un $\Lambda > 0$, de tal forma que la probabilidad de creación aumenta conforme mayor sea esta variable, es decir, entre más rápido se expanda el espacio de de Sitter, más universos generará (lo cual nos dice que es una señal que el espacio es inestable). En el caso en que el espacio de fondo sea un espacio Anti-deSitter ($\Lambda < 0$), tendremos entonces que la probabilidad de creación disminuye de manera drástica. De acuerdo con los cortes realizados a las gráficas de la probabilidad encontrada mediante la introducción de un campo de Ramond-Ramond tenemos que nuestro universo al tener una constante cosmológica distinta a cero pero muy pequeña, es medianamente probable, es decir, los rangos de probabilidad dejando libres los parámetros β y H la probabilidad está en un rango de entre cero y un medio ($\mathcal{P} \in (0, 1/2)$).

El multiverso hoy por hoy es una consecuencia seria de nuestros modelos ya comprobados, en el cual los científicos de todos niveles han puesto sus ojos; se hace investigación seria en el sentido de la física, no se investiga con un marco puramente filosófico ni con ideas esóticas y es una línea de investigación que día a día toma más fuerza [5-28].

Dentro de los problemas y perspectivas que surgen en los modelos de multiverso están el problema de medida, el cual se ha mencionado anteriormente, así como propuestas de una medida para el multiverso en términos de la teoría de límites mediante la imposición de un corte UV [17] y de una representación holográfica [9]. Además en la actualidad se trata de encontrar el número de universos posibles que puedan ser localmente de Friedmann (como el nuestro) [5], así como el tratar de explicar el nacimiento de nuestro universo desde un enfoque de multiverso [18]. También se estudia el papel que juegan los estados coherentes en la cosmología cuántica y sus implicaciones dentro de la descripción cuántica de un multiverso compuesto sólo de universos acelerados [6]. Se han generado modelos de creación de estrellas en el multiverso basados en el conocimiento del paisaje de cuerdas y la medida cosmológica [7, 17], incluso la noción de vida asociada al principio antrópico y se ha extendido al multiverso [7].

Hace 2000 años sabíamos que la tierra era el centro del universo, hace 1500 años sabíamos que la tierra era plana, hace 200 años sabíamos que la electricidad y el magnetismo eran dos cosas completamente distintas, antes de comenzar a leer esta tesis tu sabías que eras un ser único, imagina lo que sabras mañana.

APÉNDICES

Apéndice I: Breve resumen de la cosmología estandar [29]

De acuerdo con relatividad especial, la separación espacio-temporal entre dos eventos es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (\text{AI.1})$$

La métrica dada en la ecuación (AI.1) es llamada *la métrica de Minkowski*. Notemos que esta métrica describe un espacio-tiempo euclidiano llamado *espacio-tiempo de Minkowski*. Sin embargo, cuando se agrega la gravedad, el espacio-tiempo permitido se vuelve más interesante. En los 30s del siglo pasado, los físicos Howart Robertson y Artur Walker se preguntaron ¿Qué forma tiene la métrica del espacio-tiempo si suponemos que el espacio es espacialmente homogéneo e isótropo todo el tiempo y si las distancias están permitidas a expandirse como función del tiempo? La métrica que ambos desarrollaron independientemente el uno del otro se llama *métrica de Robertson-Walker*, y la forma más general de escribirla es:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dx^2}{1 - \kappa x^2/R_0^2} + x^2 d\Omega^2 \right]. \quad (\text{AI.2})$$

donde $\kappa \equiv$ el escalar de curvatura del universo y $x \equiv S_k(r)$

Notemos que la componente espacial de esta métrica consiste de la métrica espacial para espacio curvo uniforme de radio R_0 , multiplicado por el factor de escala $a(t)$, el cual se define como $a(t) = r(t)/r(t_0)$ (donde t_0 es la vida del universo) y $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ donde θ y ϕ son coordenadas esféricas. La métrica también puede ser reescrita como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2], \quad (\text{AI.3})$$

donde la función

$$S_k(r) = \begin{cases} R \sin r/R & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R \sinh r/R & (\kappa = -1). \end{cases} \quad (\text{AI.4})$$

La variable temporal t en la métrica de Robertson-Walker es el tiempo propio cosmológico, llamado *tiempo cósmico*, y es el tiempo medido por un observador el cual ve el universo expandiéndose uniformemente alrededor de él. Las coordenadas espaciales son llamadas *coordenadas co-móviles* de un punto en el espacio. Friedmann derivó su ecuación a partir de la ecuación de campo de Einstein, usando todo el poder de la relatividad general.

$$R_{ik} - \frac{g_{ik}R}{2} + \Lambda g_{ik} = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{ik} \quad (\text{AI.5})$$

donde $R_{ik} \equiv$ el tensor de Ricci, $R \equiv$ el escalar de Ricci, g_{ik} es el tensor métrico, $T_{ik} \equiv$ tensor de momento-energía y $\Lambda \equiv$ la constante cosmológica.

Siempre y cuando la relatividad no entre en juego, algunos (no todos) los aspectos de la ecuación de Friedmann pueden ser entendidos con solo el uso de la dinámica de Newton combinada con el principio cosmológico el cual nos dice que *el universo a gran escala luce igual desde cualquier punto, esto es, el universo es homogéneo e isótropo a gran escala.*

Para comenzar, consideremos una esfera homogénea de materia, con masa total M_s , constante en el tiempo. La esfera está expandiéndose o contrayéndose isotrópicamente, y su radio $R_s(t)$ se incrementa o decrece con el tiempo. Poniendo una masa de prueba, de masa infinitesimal m , en la superficie de la esfera. La fuerza gravitacional F experimentada por la masa de prueba, está dada por la ley de gravitación de Newton:

$$F = -\frac{GM_s m}{R_s(t)^2}. \quad (\text{AI.6})$$

Dado que la masa en la esfera es constante, la podemos escribir como

$$M_s = \frac{4\pi}{3} \rho R_s(t)^3, \quad (\text{AI.7})$$

y dado que la expansión es isótropa con respecto al centro de la esfera, podemos escribir el radio $R_s(t)$ en la forma

$$R_s(t) = a(t)r_s \quad (\text{AI.8})$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y r_s es el radio co-móvil de la esfera. En términos de $\rho(t)$ y $a(t)$, la ecuación de conservación de energía puede reescribirse como

$$\frac{1}{2} r_s^2 \dot{a}^2 = \frac{4\pi}{3} G r_s^2 \rho(t) a(t)^2 + U, \quad (\text{AI.9})$$

y dividiendo entre $r_s^2 a^2/2$ se tiene

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) + \frac{2U}{r_s^2} \frac{1}{a(t)^2}. \quad (\text{AI.10})$$

Esta es la *ecuación de Friedmann* en su forma newtoniana. La forma correcta de la ecuación de Friedmann, incluyendo todos los efectos de relatividad general es

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a(t)^2}, \quad (\text{AI.11})$$

donde la densidad de masa ρ se ha cambiado por la densidad de energía dividida entre c^2 . Recordando que el universo en expansión está descrito por el factor de escala $a(t)$, hay una relación lineal entre la distancia propia d y la velocidad de expansión v :

$$v(t) = H(t)d(t), \quad (\text{AI.12})$$

donde $H(t) \equiv \dot{a}/a$. Así la ecuación de Friedmann se puede escribir como

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a(t)^2}. \quad (\text{AI.13})$$

Si tomamos una curvatura $\kappa = 0$, i.e, un espacio-tiempo plano, se puede definir con el parámetro de Hubble conocido, la *densidad crítica*

$$\varepsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2. \quad (\text{AI.14})$$

Cuando se discute la curvatura del universo es más conveniente no usar la densidad absoluta ε , pero sí lo es el usar la relación con respecto a la densidad crítica ε_c . Por lo cual definimos el *parámetro de densidad*

$$\Omega(t) \equiv \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)}. \quad (\text{AI.15})$$

Apéndice II: Teoría de embebimiento

Considere una brana, Σ , de dimensión d cuyo volumen de mundo m es una variedad temporal orientada viviendo en un espacio-tiempo de fondo arbitrario N -dimensional M con métrica $g_{\mu\nu}$. Para propósitos hamiltonianos, incrustaremos el volumen de mundo m en la parte espacial de Σ . Empleando geometría diferencial de superficies, podemos escribir las ecuaciones de Gauss-Weingarten asociadas con el embebimiento de Σ en M ($x^\mu = X^\mu(u^A)$), i.e., los gradientes de la base Σ_t $\{\epsilon^\mu_A, \eta^\mu, n^\mu_i\}$.

Estos vectores espacio-temporales pueden ser descompuestos con respecto a la base adaptada de Σ , como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A \epsilon^\mu_A &= -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \epsilon^\alpha_A \epsilon^\beta_B + k_{AB} \eta^\mu - K_{AB}^i n^\mu_i \\ \mathcal{D}_A \eta^\mu &= k_{AB} \epsilon^{\mu B} - K_A^i n^\mu_i \\ \tilde{\mathcal{D}}_A n^\mu_i &= K_{AB}^i \epsilon^{\mu B} - K_A^i \eta^\mu \end{aligned}$$

donde $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ son los coeficientes de Christoffel de la variedad de fondo, K_A^i es una parte del potencial rotacional extrínseco generalizado y tanto κ_{AB} y K_{AB}^i son las curvaturas extrínsecas de Σ asociados con la normales η^μ y η^μ_i , respectivamente ($i, j = 1, 2, \dots, N-d-1$). D_A denota la derivada covariante adaptada a Σ y $\tilde{\mathcal{D}}_a$ es la derivada covariante que preserva la invariancia ante rotaciones de normales η^μ_i , i.e., $\tilde{\mathcal{D}}_A^i = \mathcal{D}_A^i - \omega_A^{ij} n_j$. De manera similar, podemos escribir las ecuaciones de Gauss-Weingarten asociadas con el embebimiento de Σ en el volumen de mundo m ($x^a = X^a(u^A)$), i.e., el gradiente de la base Σ_t $\{\epsilon^a_A, \eta^a\}$. Estos vectores del volumen de mundo pueden ser descompuesto con respecto a una base adaptada Σ , como

$$\begin{aligned} \nabla_A \epsilon^a_B &= \gamma_{AB}^C \epsilon^a_C + k_{AB} \eta^a \\ \nabla_A \eta^a &= k_{AB} \epsilon^{aB}, \end{aligned}$$

donde ∇_A es el gradiente sobre la base tangente, i.e., $\nabla_A = X^a_{,A} \nabla_a$, donde ∇_a es la derivada covariante compatible con γ_{ab} . El campo vectorial temporal, escrito en términos de la base adaptada de una hoja Σ_t , está dada por

$$t^\mu = \dot{X}^\mu = N \eta^\mu + N^A \epsilon^\mu_A, \quad (\text{AII.1})$$

la cual representa el flujo temporal asociado al espacio-tiempo. De (AII.1) notamos que la siguiente relación se cumple:

$$N = -g_{\mu\nu} \eta^\mu \dot{X}^\nu \quad \text{y} \quad N^A = g_{\mu\nu} h^{AB} \epsilon^\mu_A \dot{X}^\nu.$$

Apéndice III: Matriz Ψ

En este apéndice se escribe la matriz Ψ completa para el embebimiento usado en el modelo donde el universo se crea con la introducción de un campo de Ramond-Ramond [38].

$$(\Psi)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a^2 A_\pm} \left[6 - \Lambda_b a^2 + \frac{6a^2}{(-\Delta)} \right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_\pm}{2a^2} \left[6 - \Lambda_b a^2 + \frac{6a^2}{(-\Delta)} + 12A_\pm \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2a^4} \left[6 - \Lambda_b a^2 + \frac{6a^2}{(-\Delta)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (\text{AIII.1})$$

La matriz previa, en la norma cósmica, se reduce a una forma más manejable

$$(\Psi)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 3H^2 A_\pm^{-1} (1-\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3A_\pm a^{-2} [-H^2 a^2 (1-\gamma) + 2A_\pm] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3a^{-2} H^2 (1-\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (\text{AIII.2})$$

donde $M_{2 \times 2}$ y $N_{2 \times 2}$ denota matrices diagonales 2×2 .

Apéndice IV: Aparato matemático de la teoría de Everett [32]

Dentro de la teoría de Hugh Everett III se definen distintos aparatos matemáticos los cuales se exponen brevemente a continuación. Asumiendo que tenemos una colección de conjuntos finitos, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots, \mathcal{Z}$ cuyos elementos son denotados por $x_i \in X, y_j \in Y, \dots, z_k \in Z$, etc., de aquí tenemos una *distribución de probabilidad conjunta*, $P = P(x_i, y_j, \dots, z_k)$, definida sobre el producto cartesiano de los conjuntos, los cuales representan la probabilidad de eventos combinados x_i, y_j, \dots, z_k . Entonces denotamos por X, Y, \dots, Z a variables aleatorias cuyos valores son elementos de los conjuntos $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots, \mathcal{Z}$ con probabilidades dadas por P . Para cualquier subconjunto Y, \dots, Z de un conjunto de variables aleatorias W, \dots, X, Y, \dots, Z , con distribución de probabilidad conjunta $P(w_i, \dots, x_j, y_k, \dots, z_l)$, la *distribución marginal*, $P(y_k, \dots, z_l)$, está definida por:

$$P(y_k, \dots, z_l) = \sum_{i, \dots, j} P(w_i, \dots, x_j, y_k, \dots, z_l), \quad (\text{AIV.1})$$

la cual representa la probabilidad de la ocurrencia conjunta de y_k, \dots, z_l , sin ninguna restricción sobre las variables ajenas al subconjunto. Para un subconjunto Y, \dots, Z de un conjunto de variables aleatorias la *distribución marginal*, condicionada sobre los valores $W = w_i, \dots, X = x_j$ para cualquier subconjunto remanente W, \dots, X y denotado por $P^{w_i, \dots, x_j}(y_k, \dots, z_l)$, está definido por:

$$P^{w_i, \dots, x_j}(y_k, \dots, z_l) = \frac{P(w_i, \dots, x_j, y_k, \dots, z_l)}{P(w_i, \dots, x_j)}, \quad (\text{AIV.2})$$

la cual representa la probabilidad de que el evento conjunto $Y = y_k, \dots, Z = z_l$, condicionada por el hecho de que W, \dots, X toman los valores w_i, \dots, x_j respectivamente. Para cualquier función con valores numéricos $F(y_k, \dots, z_l)$, definida sobre elementos del producto cartesiano de $\mathcal{Y}, \dots, \mathcal{Z}$, la *expectación*, denotada por $\text{Exp}[F]$, está definida por:

$$\text{Exp}[F] = \sum_{k, \dots, l} P(y_k, \dots, z_l) F(y_k, \dots, z_l). \quad (\text{AIV.3})$$

De esta manera también se define la *expectación condicional*, como:

$$\text{Exp}^{w_i, \dots, x_j}[F] = \sum_{k, \dots, l} P^{w_i, \dots, x_j}(y_k, \dots, z_l) F(y_k, \dots, z_l). \quad (\text{AIV.4})$$

Supongamos que se tiene una sólo variable aleatoria X , con distribución $P(x_i)$. Se define entonces el número, I_X , llamado la *información de X* , como:

$$I_X = \sum_i P(x_i) \ln P(x_i) = \text{Exp}[\ln P(x_i)], \quad (\text{AIV.5})$$

la cual es una función de probabilidad y no representa los valores de las x_i s en sí mismas. Podemos generalizar la ecuación (AIV.5) para obtener la información de un grupo de variables aleatorias X, Y, \dots, Z con distribución conjunta $P(x_i, y_j, \dots, z_k)$ la cual se denota por $I_{XY\dots Z}$:

$$I_{XY\dots Z} = \sum_{i, j, \dots, k} P(x_i, y_j, \dots, z_k) \ln P(x_i, y_j, \dots, z_k) = \text{Exp}[P(x_i, y_j, \dots, z_k)], \quad (\text{AIV.6})$$

Se define una *información condicional*, $I_{XY\dots Z}^{v_m, \dots, w_n}$, como:

$$I_{XY\dots Z}^{v_m, \dots, w_n} = \sum_{i, j, \dots, k} P^{v_m, \dots, w_n}(x_i, y_j, \dots, z_k) \ln P^{v_m, \dots, w_n}(x_i, y_j, \dots, z_k) = \text{Exp}^{v_m, \dots, w_n}[P^{v_m, \dots, w_n}(x_i, y_j, \dots, z_k)], \quad (\text{AIV.7})$$

la cual es una cantidad que mide la información sobre X, Y, \dots, Z dado que se conoce que V, \dots, W han tomado los valores particulares v_m, \dots, w_n . Para variables aleatorias independientes X, Y, \dots, Z , se tiene que:

$$I_{XY\dots Z} = I_X + I_Y + \dots + I_Z \quad (X, Y, \dots, Z \text{ independientes}) \quad (\text{AIV.8})$$

Definimos la *correlación*, de X y Y , denotada por $\{X, Y\}$, de la siguiente manera:

$$\{X, Y\} = \text{Exp}[I_X^{y_j} - I_X] = \text{Exp}[I_X^{y_j}] - I_X = I_{XY} - I_Y. \quad (\text{AIV.9})$$

Bibliografía

- [1] Max Tegmark, *Parallel Universes*, *Scientific American*, pag. 40 (May 2003).
- [2] Andrei Linde, *Self Inflationary Universe*, *Scientific American*, pag. 48 (November 1994).
- [3] A. Vilenkin, *Quantum cosmology and eternal inflation*, e-Print: [arXiv:gr-qc/0204061 v1](#) (2002).
- [4] Max Tegmark, *Many worlds in context*, e-Print: [arXiv:0905.2182 v1 \[quant-ph\]](#) (May 2009).
- [5] A. Linde, V. Vanchurin "How many universes are in the multiverse?", e-Print: [arXiv:0910.1589\[hep-th\]](#) (2009).
- [6] S. Robles-Perez, Y. Hassouni, P.F. Gonzalez-Diaz "Coherent states in the quantum multiverse", e-Print: [arXiv:0909.3063\[gr-qc\]](#) (2009).
- [7] P.F. Gonzalez-Diaz "Life originated during accelerating expansion in the multiverse" e-Print: [arXiv:0908.3244\[physics.gen-ph\]](#) (2009).
- [8] R. Bousso, S. Leichenauer "Predictions from Star Formation in the Multiverse ", *Phys. Rev D* 79:063506 e-Print: [arXiv:0907.4917\[hep-th\]](#) (2009).
- [9] J. Garriga , A. Vilenkin "Holographic multiverse and conformal invariance ", e-Print: [arXiv:0905.1509\[hep-th\]](#) (2009).
- [10] S.E. Hong, D. Yeom, H. Zee "Critical Reviews on Holographic Measure over the Multiverse", *International Symposium on Cosmology and Particle Astrophysics, Pohang, Korea , 29 Oct - 1 Nov 2008* e-Print: [arXiv:0903.2370\[gr-qc\]](#) (2009).
- [11] R. Bousso, L.J. Hall, Y. Nomura "Multiverse Understanding of Cosmological Coincidences", *Phys.Rev. D* 80 (2009) .
- [12] R. Bousso "Complementarity in the Multiverse" *Phys.Rev. D* 79 (2009).
- [13] A. Dahlen "Odds of observing the multiverse" e-Print: [arXiv:0812.0414\[hep-th\]](#) (2008).
- [14] A.D. Linde, V. Vanchurin, S. Winitzki "Stationary Measure in the Multiverse" *JCAP* 0901:031, (2009).
- [15] L. Mersini-Houghton, R. Holman "'Tilting' the Universe with the Landscape Multiverse: The 'Dark' Flow" *JCAP* 0902:006, (2009).
- [16] R. Bousso, S. Leichenauer "Star Formation in the Multiverse" *Phys.Rev. D* 79, (2009).
- [17] J. Garriga, A. Vilenkin "Holographic Multiverse" *JCAP* 0901:021, (2009).
- [18] L. Mersini-Houghton "Birth of the Universe from the Multiverse" e-Print: [arXiv:0809.3623\[hep-th\]](#)
- [19] A. De Simone, A.H. Guth, A.D. Linde, M. Noorbala, M.P. Salem, A. Vilenkin "Boltzmann brains and the scale-factor cutoff measure of the multiverse" e-Print: [arXiv:0808.3778\[hep-th\]](#), (2008).
- [20] L. Mersini-Houghton "Thoughts on Defining the Multiverse" e-Print: [arXiv:0804.4280\[gr-qc\]](#), (2008).

- [21] V. Palonen "Bayesian considerations on the multiverse explanation of cosmic fine-tuning" e-Print: [arXiv:0802.4013](https://arxiv.org/abs/0802.4013)[physics.data-an], (2008).
- [22] Don N. Page "Does God so love the multiverse?" e-Print: [arXiv:0801.0246](https://arxiv.org/abs/0801.0246)[physics.gen-ph], (2008).
- [23] L. J. Hall, Y. Nomura "Evidence for the Multiverse in the Standard Model and Beyond" *Phys.Rev. D* **78**, (2008).
- [24] B. J. Carr, "Universe or multiverse? ", *Cambridge, UK: Univ. Pr.* 517 p. (2007)
- [25] Tom Gehrels "The multiverse and the origin of our universe", e-Print: [arXiv:0707.1030](https://arxiv.org/abs/0707.1030)[astro-ph]
- [26] M. Li, Y. Wang "The Measure for the Multiverse and the Probability for Inflation", *JCAP* **0706:012**, (2007).
- [27] S. Robles-Perez, P. Martin-Moruno, A. Rozas-Fernandez, P.F. Gonzalez-Diaz "A Dark energy multiverse", *Class.Quant.Grav.* **24:F41**, (2007).
- [28] A. Barrau "World-making with extended gravity black holes for cosmic natural selection in the multiverse scenario", *11th Marcel Grossmann Meeting* 1349-1351, (Berlin 2006).
- [29] B. Rydan, *Introduction to cosmology*, Pearson Education, Addison Wesley Press (2003).
- [30] Aurélien Barrau, *Physics in the multiverse: an introductory review*, *CERN courier*, vol 47, edición 10, pag. 13 (2007).
- [31] R. Bousso and J. Polchinski, *The string theory landscape*, *Scientific American*, pag. 78 (september 2004).
- [32] Hugh Everett III, Edited by B. DeWitt and N. Graham, *The many world interpretation of quantum mechanics*, Princenton University Press, (1973).
- [33] J.D. Barrow, *Living in a simulated Universe, Universe or Multiverse?*, ed B.J. Carr , Cambridge UP. cap. 27 pag. 481 (2007)
- [34] Stefano Bettini, *A cosmic archipelago: Multiverse scenarios in the history of modern cosmology*, e-print: [physics/0510111](https://arxiv.org/abs/physics/0510111) (2005).
- [35] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [36] , Steinhardt, P J "Natural inflation", in *The Very Early Universe*, Proceedings of the Nuffield Workshop, Cambridge, 21 June - 9 July, 1982, eds: Gibbons, G W, Hawking, S W y Siklos, S T C (Cambridge: Cambridge University Press), pp. 251-66, (1983).
- [37] Linde, A D "Eternal chaotic inflation", *Mod. Phys. Lett. A* **1**, 81-5, (1986).
- [38] R. Cordero and E. Rojas, *Nucleation of ⁽⁴⁾R brane universes*, *Class. Quant. Grav.*, **21** p. 4231 (2004).
- [39] Vilenkin, A "The birth of inflationary universes", *Phys. Rev. D* **27**, 2848-55, (1983).
- [40] Guth, A H "Eternal inflation and its implications", e-print: [arXiv: hep-th/0702178v1](https://arxiv.org/abs/hep-th/0702178v1), (2007).
- [41] A. D. Linde, *Lett. Nuovo Cimento* **39**, 401 (1984).
- [42] Vilenkin, A y Ford, L H "Gravitational effects upon cosmological phase transitions" *Phys. Rev D* **26**, 1231-41, (1982).
- [43] Linde, A D "Scalar field fluctuations in expanding universe and the new inflatony universe scenario", *Phys. Lett. B* **116**, 335, (1982).
- [44] Starobisky, A in *Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, eds: Vega, H J y Sánchez, N, *Lectures Notes in Physics* (Springer Verlag) Vol. 246, pp. 107-26, (1986).

- [45] Starobinsky, A “ Dynamics of phase transition in the new inflatonary universe scenario and generation of perturbations”, *Phys. Lett. B* **117**, 175-8, (1982).
- [46] DeWitt, B.S. “Quantum theory of gravity. I. The canonical theory”, *Phys. Rev.* **160**, 1113, (1967).
- [47] Misner, C.W. “Minisuperspace ”, en *Magic without magic* (Freeman, San Francisco), (1972).
- [48] David Atkatz, *Quantum cosmology for pedestrians*, *American Journal of Physics*, **62**, (July 1994).
- [49] A. Vilenkin, *Phys.Lett B* **117**, 25 (1982), *Phys. Rev. D* **30**, 509 (1984); *Phys. Rev. D* **33**, 3560 (1986).
- [50] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **28**, 2960 (1983).
- [51] V. A. Rubakov, *Phys. Lett. B* **148**, 280 (1984).
- [52] K. V. Kuchař, *The Problem of Time in Canonical Quantization*, in *Conceptual Problems of Quantum Gravity*, Eds. A. Ashtekar and J. Stachel, Birkhäuser, Boston, (1991).
- [53] J. B. Hartle, *Quantum Cosmology: Problems for the 21st Century*, gr-qc/9701022.
- [54] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998); I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett. B* **436**, 257 (1998).
- [55] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett* **83**, 3370 (1999); 4690 (1999).
- [56] T. Regge and C. Teitelboim, in *Proc. Marcel Grossman*, p. 77 (Trieste, 1975).
- [57] M. D. Maia and W. Mecklemburg, *J. Math. Phys.* **25** 3047 (1984); M. D. Maia, *Phys. Rev. D* **31** 262 (1985).
- [58] M. Pavsic, *Phys. Lett. A* **116** 1 (1986).
- [59] M. Pavsic and V. Tapia, *Resource Letter on Geometrical Results for Embeddings and Branes*, gr-qc/0010045;
- [60] V. A. Rubakov, *Large and Infinite Extra Dimensions*, hep-th/0104152;
- [61] *Supernova Cosmology Project*, <http://www.supernova.lbl.gov>
- [62] G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *Phys. Lett. B* **484**, 112 (2000).
- [63] C. Deffayet, *Phys. Lett. B* **502**, 199 (2001).
- [64] G. Dvali, G. Gabadadze, *Phys. Rev. D* **63**, 065007 (2001).
- [65] P. Binetruy, C. Defayet, and D. Langlois *Nucl. Phys. B* **565**, 269 (2000).
- [66] D. Ida, *JHEP* **0009**, 014 (2000).
- [67] N. Deruelle and T. Dolezel, *Phys. Rev. D* **62**, 103502 (2001).
- [68] P. Bowcock, C. Charmousis and R. Gregory, *Class. Quant. Grav.* **17**, 4745 (2000).
- [69] A. C. Davis, S. C. Davis, W. B. Perkins and I. R. Vernon, *Phys.Lett B* **504**, 254 (2001).
- [70] B. Carter and J.P. Uzan, gr-qc/0101010; R. Battye, B. Carter, A. Mennim and J.P. Uzan, hep-th/0105091; B. Carter, J. P. Uzan, R. A. Battye and A. Mennim, *Class. Q. Grav.* **18** 4871 (2001).
- [71] L. Anchordoqui, C. Nuñez and K. Olsen , hep-th/0007064.
- [72] H. Collins and B. Holdom, *Phys. Rev. D* **62**, 105009 (2000); **62**, 124008 (2000).
- [73] J. D. Brown and C. Teitelboim, *Nucl. Phys. B* **297** 787 (1988).
- [74] J. Garriga *Phys. Rev. D* **49**, 6327 (1994).
- [75] J. Garriga and M. Sasaki, *Phys. Rev. D* **62**, 043523 (2000).

- [76] A. Gorsky and K. Selivanov, *Phys. Lett. B* **485**, 271 (2000).
- [77] S. Nojiri and S.D. Odintsov, *JHEP* **12**, 033 (2001); S. Nojiri and S. D. Odintsov and A.S Ogushi, hep-th/0205187.
- [78] M. Bouhmadi-López, P. F. González-Díaz and A. Zhuk, *Class. Quant. Grav.* **19**, 4863 (2002).
- [79] K. Koyama and J. Soda, *Phys. Lett. B* **483**, 432 (2000).
- [80] D. Karasik and A. Davidson, *Geodesic Brane Gravity*, gr-qc/0207061; *Mod. Phys. Lett. A* **13** 2187 (1998).
- [81] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press (1992).
- [82] A. Vilenkin, *Phys. Rev. D*, **50** 2581 (1994).
- [83] F.M. Maya-Ordoñez, *Master's Degree Thesis*, "Cosmología de mundos brana", ESFM (2009)
- [84] Hugh Everett III, *Relative state"Formulation of quantum mechanics*, *Rev. of Mod. Phys.*, **29**, pag. 454, (July 1957).
- [85] Brice S. DeWitt, *Quantum mechanics and reality*, *Physics today*, vol **23**, Number **9**, (September 1970).
- [86] von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, (1955).
- [87] Wigner, E.P. "Remarks on the Mind-Body Question" en *The Scientist Speculates*, William Heinemann Ltd, Londres (1961).
- [88] Bohm, D., *Phys. Rev.* **85**, 166 y 180 (1952); **87**, 389 (1952); **87**, 319 y 458 (1953).
- [89] Bohm, D. y Bub, J. *Rev. Mod. Phys.* **38**, 453 y 470, (1966).
- [90] Petersen, A. *Quantum Physics and the Philosophical Tradition*, MIT Press, Cambridge (1968).
- [91] Wheeler, J.A. *Rev. Mod. Phys.* **29** 463 (1957).
- [92] Graham, R.N. PhD thesis, University of North Carolina (1970).
- [93] J. Garriga and A. Vilenkin, *Prediction and explanation in the multiverse*, *Phys. Rev. D*, **77**, 043526, (2008).
- [94] J. Garriga and A. Vilenkin, *Many worlds in one*, *Physical review D*, **64**, 043511, (2001).