Archimedes – Das antike Jahrtausend-Genie

Norbert Froese

Stand: 26.02.2026

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

> Mit Archimedes erreichte die Mathematik der Antike ihren Höhepunkt. Sein Gedankenreichtum auf allen Gebieten der Mathematik, in der Astronomie, Hydrostatik, Mechanik und Technik verlieh ihm schon in der Antike ein hohes Ansehen, noch gesteigert durch die Erfindung äußerst wirkungsvoller Verteidigungswaffen, mit deren Hilfe seine Vaterstadt Syracus auf Sizilien den römischen Belagerern zwei Jahre Widerstand leisten konnte.
> Hans Wußing[*]

Der Begriff *Genie* wird häufig recht leichtfertig verwendet. Wenn es jedoch um Archimedes (ca. 287 – 212 v.Chr.) geht, kann man diesen Begriff verwenden, ohne Angst haben zu müssen, damit der inflationären Verwendung dieses Begriffs weiteren Vorschub zu leisten. Selbst das Prädikat *Jahrtausend-Genie* ist in seinem Fall durchaus angemessen.

> Archimedes war einer der drei besten Mathematiker aller Zeiten; nur Newton und Gauß werden allgemein als ihm ebenbürtig angesehen.[1]

Wie von einem Jahrtausend-Genie nicht anders zu erwarten, hat Archimedes sowohl bis dahin ungelöste Probleme erfolgreich bearbeitet, als auch neue produktive Konzepte und Sichtweisen eingeführt. Die *mathematische Formulierung des Hebelgesetzes* und das *Prinzip des hydrostatischen Auftriebs* – beides noch immer gelehrte Grundeinsichten der mathematischen Physik - sind heutzutage seine bekanntesten Leistungen. Zu seinen Lebzeiten hat wohl – jenseits seiner Kriegsmaschinen – das von ihm entworfene Planetarium bei seinen Mitmenschen den größten Eindruck gemacht.
Eher unbekannt ist, dass ihm mittels der *archimedischen* Spirale, die *Rektifikation* des Kreisumfangs gelang: Er konnte zu einem beliebigen Kreis eine (gerade) Strecke mit der Länge des Umfangs konstruieren. Archimedes hat natürlich eine lange Liste weiterer geometrischer Probleme gelöst. So hat er Oberfläche und Volumen von Rotationskörpern (darunter auch jene der Kugel) bestimmt. Bei den ebenen Figuren ist speziell seine Arbeit zur *Quadratur der Parabel* hervorzuheben: Er hat dabei mehr 1700 Jahre vor den ersten Anfängen der modernen Integralrechnung die *Integration der Parabel*, sprich die Flächenbestimmung unter einem Parabelsegment, *klassisch geometrisch* gemeistert.
Archimedes ist (vermutlich) die Konstruktion des regulären Siebenecks gelungen und er hat Verfahren zur Benennung von Zahlen *kosmischer* Größenordnungen entwickelt.

> Bedeutsam ist *Die Sandzahl* (oder die Sandrechnung), in der alle Zahlen bis $A * 10^8$ mit
>
> $$A = (10^8)^{10^8}$$
>
> eine Benennung erhalten und die unbegrenzte Fortsetzbarkeit der Zahlenreihe ausgesprochen wird.[2]

Von herausragender ideengeschichtlicher Bedeutung ist das von Archimedes eingeführte Konzept des *Schwerpunkts*. In einem Text namens *Über das Gleichgewicht ebener Flächen* führt Archimedes dieses für die moderne Physik unverzichtbare Konzept zunächst für zweidimensionale Objekte ein.[3] Ab der Renaissance wird dieser Begriff vermehrt für starre, räumliche (dreidimensionale) Körper nutzbar gemacht[4] und ist seitdem nicht nur

---

* Hans Wußing:Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Frankfurt am Main. Verlag Harri Deutsch 2008. S. 68.

1 Paul Strathern: Archimedes & der Hebel. Frankfurt am Main: Fischer Taschenbuch Verlag 1999. S.11.

2 Hans Wußing: 6000 Jahre Mathematik. Bd 1. Berlin, Heidelberg. Springer Verlag 2008. S. 198.

3 Vgl. z.B. Ostwald Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 201. Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. S.175ff. Technisch gesehen, fallen die archimedischen *Schwerpunkte* zweidimensionaler Figuren mit dem modernen *Flächenmittelpunkt* zusammen.

4 Archimedes hatte zwar bereits in *Über schwimmende Körper* das Konzept des Schwerpunkts auf dreidimensionale Körper angewandt, dabei jedoch nur den Paraboloiden genauer diskutiert. In der *Methodenlehre* hat sich Archimedes zur Lage der Schwerpunkte für Zylinder, Kegel und Prisma geäußert, diese Schrift war in Renaissance und Neuzeit jedoch unbekannt und wurde erst im 20. Jahrhundert wieder entdeckt.

eins der Schlüsselkonzepte der *Statik*, sondern ist genauso für die mechanische *Dynamik* von zentraler Bedeutung. Erst wenn man bei der Bewegung von Körpern speziell die *Bewegung ihrer Schwerpunkte* betrachtet, kann man den Bewegungen jene Trajektorien zuordnen, die man dann – unter den üblichen Idealisierungen – als zweifach nach der Zeit differenzierbare Bahnkurven auffasst, welche das Standardthema der zeitgenössischen dynamischen Mechanik darstellen. Dass es in der aktuellen Physik dabei genaugenommen häufig um *Massenmittelpunkte* und nicht mehr um *Schwerpunkte* geht, mindert das Verdienst des Archimedes kaum. Der *Massenmittelpunkt* ist ein legitimer Nachkomme des *Schwerpunkts.*[5] (KI)

Wenn man Arbeiten von Archimedes liest, ist man häufig erstaunt, wie modern seine Denkansätze sind. Aber vielleicht sollte man es besser anders herum formulieren: Es ist verblüffend, wie langanhaltend sein Einfluss auf die Denkweisen der mathematisierten Naturwissenschaften war und noch immer ist. Das hat natürlich damit zu tun, dass, als sich ab der Renaissance die modernen Naturwissenschaften herauszubilden begannen, die Schlüsselfiguren dieses Prozesses *Archimedes-Leser* waren.

Trotz des hohen Ansehens, das Archimedes schon in der Antike besaß, konnten damals höchstens eine handvoll seiner Zeitgenossen seine anspruchsvollsten Arbeiten im Detail nachvollziehen und würdigen. Es gab einen Mangel an kompetenten Dialogpartnern und Archimedes hat darunter wohl auch gelitten. Allgemeine Bewunderung ist eben kein vollwertiger Ersatz für produktiven Gedankenaustausch.

Die archimedischen Schriften haben auch nach seinem Tode lange warten müssen, bis sie ein Publikum fanden, das die inspirierende Kraft der Schriften aufnehmen konnte und in der Lage war – in Archimedes‘ Sinn und auf seinen Ergebnissen aufbauend – am weiteren Fortschritt der Wissenschaften zu arbeiten. Das hat *auch* damit zu tun, dass in puncto Mathematik und mathematisierte Naturwissenschaften das Mittelalter im lateinisch-katholischen Europa eine wirklich *dunkle Epoche* war. So fand man in Klöstern nichts dabei, die überaus raren Kopien der archimedischen Schriften mit Gebeten oder Psalmen zu überschreiben. Und so gingen bis zum Jahr 1.000 im lateinisch-katholischen Europa die Archimedes Schriften praktisch vollständig verloren.[6] Die archimedischen Texte sind, zu unser aller Glück, im griechisch-orthodoxen Byzanz zumindest etwas pfleglicher behandelt worden. Mittels der dort erhaltenen Quellen konnte – ab späten Mittelalter – ein Großteil des archimedischen Schrifttums wieder im katholisch-lateinischen Europa zugänglich gemacht werden. So konnten Kopien seiner Texte viele Jahrhunderte nach ihrer Niederschrift als wichtige Quelle für eine neue Blüte der Wissenschaften genutzt werden.

> Archimedes sollte von Omar Khayyam, Leonardo da Vinci, Galileo Galilei und Isaac Newton gelesen werden; sie waren seine eigentlichen Leser, und durch sie erlangte seine Arbeit ihre Bedeutung.[7]

Um den Schatz, der in den Schriften des einen Genies schlummert, zu heben, bedarf es häufig eines anderen Genies.[8]

---

5 Zur Bedeutung des Begriffs des *Massenmittelpunkts* in der modernen Physik vgl. z.B. die Feynman Vorlesungen zur Physik. Band 1, Kapitel 18 und 19.

6 Ich bin immer wieder darüber erstaunt wie wenig den Vertretern der modernen Mediävistik widersprochen wird, wenn diese die Einstufung des lateinisch-katholischen Mittelalters als *dunkler Epoche* zu einem unbegründetem Vorurteil der Neuzeit erklären. Zugegeben, es gab im katholischen Mittelalter Entwicklungen zu differenzierteren gesellschaftlichen Strukturen und zu Institutionen mit vergleichsweise klar abgegrenzten Kompetenzen, es gab auch nennenswerte Verbesserungen bei handwerklicher Technik, Waffen und in der Landwirtschaft, aber wenn man christliche Theologie nicht zu einem ausreichenden Substitut für Mathematik und mathematisierte Wissenschaften erklärt, dann gab es im Bereich Hochkultur einen Wissensverlust, der eine Kennzeichnung als ***dunkler Epoche*** als durchaus angemessen erscheinen lässt.

7 Reviel Netz & William Noel: Der Kodex des Archimedes. München. dtv 2010. S. 43.

8 Der Gedanke, dass alle Menschen mehr oder minder gleich oder zumindest gleichwertig begabt sind, mag seinen Charme haben, es gibt jedoch keinen Grund, der Natur einen ausgeprägten Sinn fürs Egalitäre zu unterstellen. Und auch wenn man die ungleiche Verteilung von Talent für eine himmelschreiende Ungerechtigkeit hält, es sind erstaunlich wenige, denen wir die Mehrzahl der großen intellektuellen Durchbrüche zu verdanken haben.

Neben den unmittelbaren Resultaten sind es vor allem zwei Aspekte seines Denkstils, mit denen Archimedes auch noch Jahrhunderte nach seinem Tod Einfluss auf die mathematisierten Naturwissenschaften nahm:

- Wenn Archimedes brilliert, dann häufig durch die Analyse von Gleichgewichtssituationen und die Benennung der einschlägigen Gleichgewichtsbedingungen. Ein vertieftes Verständnis von Gleichgewichten ist häufig der zentrale Angelpunkt seiner Arbeiten. Bis heute folgen viele Arbeiten der theoretischen Physik dieser von Archimedes gestifteten guten Tradition: *Lass uns zuerst Gleichgewichtssituationen analysieren und die einschlägigen Gleichgewichtsbedingungen benennen. Wenn wir wissen, wann etwas im Gleichgewicht ist, dann sehen wir schon viel klarer.* Ein neuzeitliches Beispiel für die Fruchtbarkeit dieses Ansatzes ist das Gedankenexperiment des Archimedes Lesers Stevin.[9]
- Vielleicht noch segensreicher war die Aufmerksamkeit, die Archimedes Symmetrien schenkt. Symmetrieargumente werden in den Beweisen teils explizit genutzt oder dienen als leicht aufzufassender Hintergrund bei der Anlage der Beweisgänge. Zudem tauchen Symmetrieforderungen immer wieder als Teil der Prämissen (Postulate) auf. Wie ungemein zentral Symmetrien für die theoretische Physik sind, hat im 20. Jahrhundert insbesondere Emmy Noether deutlich gemacht. Mit einem gruppentheoretisch geläuterten Symmetriebegriff im Gepäck konnte Noether einen fundamentalen Zusammenhang zwischen den *Symmetrie-Gruppen* von Theorien und deren Erhaltungsgrößen aufzeigen.[10] Das bei Noether verwendete Symmetriekonzept geht zwar deutlich über den noch stark geometrisch eingefärbten Symmetriebegriff bei Archimedes hinaus, aber Archimedes hat wieder den entscheidenden ersten Impuls gegeben: *Achte auf die Symmetrien und nutze sie als leistungsstarkes Beweismittel!* Die Bedeutung *von Symmetrien* ist heutzutage unstrittig. Wenn von Fachwissenschaftlern über die *Physik der Zukunft* spekuliert wird, so nimmt die Frage nach der anzusetzenden *Symmetrie-Gruppe* einer solchen noch aufzufindenden Theorie stets eine höchst prominente Stelle ein. (KI)

Neben seinen theoretischen Beiträgen zu Mathematik (Strukturwissenschaft) und theoretischen Physik (empirische Wissenschaft), hat Archimedes auch sehr beachtliches bei der Lösung praktischer Probleme geleistet. Und es sind vor allem seine praktischen Arbeiten und Leistungen, die als Aufhänger für die Geschichten und Legenden rund um Archimedes dienen. Ein paar dieser Archimedes-Geschichten sollen – ohne viel Aufwand in die Prüfung des Wahrheitsgehalts zu investieren – in die Schilderung seines Lebens und seiner Leistungen eingeflochten werden.

Die oben angesprochene Unterscheidung zwischen Strukturwissenschaften und empirischen Wissenschaften hat Archimedes übrigens so nicht gemacht. Diese Unterscheidung, mit der uns heute geläufigen Betonung des *prinzipiellen* Unterschieds zwischen Strukturwissenschaften und empirischen Wissenschaften, ist erst viel später aufgekommen.

Was aber Archimedes kannte, war die Unterscheidung zwischen *einerseits* der Entwicklung einer Vermutung samt deren Stützung durch die sogenannte *mechanische Methode* sowie *anderseits* der Sicherung der entsprechenden Sätze durch *geometrische Beweise*:

> *Archimedes* ist oft durch mechanische Überlegungen zu Einsichten über geometrische Zusammenhänge gekommen. Er schreibt selbst dazu (…):

9 Siehe hierzu auch Feynman/Leighton/Sands: Feynman Vorlesungen zur Physik, Band 1. München. Oldenburg Verlag 1987. S. 64f.

10 Dass Emmy Noether trotz dieser und noch vieler anderer Leistungen und trotz der Unterstützung durch Hilbert eine Professur in Göttingen verweigert wurde, einfach, weil sich die damals dabei auch stimmberechtigten Historiker daran gestört haben, dass Noether eine Frau war, kann man empörend finden, auch wenn man vielen Ausprägungen des modernen Feminismus ansonsten eher kopfschüttelnd gegenüber steht.

> Gewisse Sätze sind mir erst durch eine mechanische Methode klar geworden, mußten aber nachher geometrisch bewiesen werden, weil ihre Behandlung nach der genannten Methode keinen wirklichen Beweis liefert.[11]

Zur *mechanischen Methode* des Archimedes gehören Formen des Räsonierens, die etliche Gedanken der frühen Analysis schon in der Antike vorweggenommen haben. So präsentiert er in seiner Methodenlehre z.B. eine Technik des Herleitens von Resultaten, bei der man gut von einer Vorform des Prinzips von Cavalieri sprechen kann. Über die Frage wie man die Bedeutung der diesbezüglichen archimedischen Überlegungen am *angemessensten würdigt* und wie nah Archimedes bereits damals, in der Antike, der Mathematik des 17., 18. und 19. Jahrhunderts wirklich kam, wird bis heute gestritten. Klar ist jedoch: Vieles von dem, was er an Sichtweisen und Methoden in seiner Methodenlehre vorstellt, betrachtet er zwar als ungemein hilfreich zum Auffinden von Sätzen wie zur Planung von Beweisen, aber er hält diese Sichtweisen und Methoden *nicht* für ausreichend gesichert, um darauf seine ***Beweise*** gründen zu wollen. In der Methodenlehre geht es vor allem um *gute Heuristik*, *nicht* um verlässliche Beweistechnik. Die damaligen antiken Geometer hatten beim Thema *Beweisen* einen Sinn für Strenge, der sich mit ungeklärten Problemen beim *Indivisiblen* oder *Infinitesimalen* nur schlecht vertrug.[12]

Nach Archimedes' eigenen Aussagen hat ihm die sogenannte *mechanische Methode* wichtige Dienste bei der Klärung vieler Fragen geleistet. Aber erst wenn die so gewonnenen Vermutungen zusätzlich durch (geometrische) Beweise gesichert worden waren, war für Archimedes das Problem erledigt.

Und wenn dann etwas mit der gebührenden geometrischen Strenge bewiesen worden war, dann wurde für Archimedes damit auch ganz automatisch etwas *über die erfahrbare Welt* ausgesagt. Der Gedanke, dass mängelfrei bewiesene Aussagen *als Beschreibung der Welt* schlichtweg *empirisch falsch* sein könnten, taucht bei Archimedes nicht auf. Dass es in der erfahrbaren Welt die *Möglichkeit zu kleineren Abweichungen* zu den von ihm bewiesenen Theoremen gibt, hätte Archimedes vermutlich zugestanden. Die Objekte der realen Welt entsprechen ja nie so ganz den idealisierten Objekten, die in den Beweisen auftauchen. Das wäre aus seiner Sicht aber wohl der *einzige* Punkt gewesen, der es der erfahrbaren Welt ermöglicht, (in gewissen, relativ engen Grenzen) von den von ihm bewiesenen Theoremen abzuweichen. Nach der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien beurteilt man solche Fragen heute deutlich anders.

Wenn im folgenden versucht wird, einen Einblick in die Fülle des von Archimedes hinterlassenen Materials zu geben, dann wird jenseits der Ausführungen im Unterabschnitt *Kreismessung* **kein** Versuch unternommen, einen tieferen Einblick in die (meist etwas längeren) Beweisgänge zu geben.[13] Im Abschnitt zur Parabelquadratur wird jedoch, als Beispiel für eine bestimmte Beweistechnik, ein *Hilfssatz* mit *Beweis* komplett vorgestellt. Ansonsten begnügt sich dieses Paper meist mit ein paar Hinweisen zur Beweisstrategie.

Wenn nun unter diesen Beschränkungen den Leistungen des Archimedes nun etwas näher getreten wird, dann wird dabei auch ansonsten keinerlei Art von Vollständigkeit angestrebt. Es soll ein erster informativer Einblick in die unglaubliche Schaffenskraft dieses Jahrtausend-Genies gegeben werden, mehr nicht.[14]

---

11 Herbert Meschkowski: Denkweisen großer Mathematiker. Braunschweig. Vieweg 1990. S.26.

12 Die Gründerväter der Analysis waren da etwas toleranter. Sie nahmen gewisse Ungereimtheiten in Kauf, weil sie von der Leichtigkeit, mit der man mittels dieser neuen Mathematik Resultate erzielen konnte, fasziniert waren. Erst die Arbeiten von Weierstraß zeigten zum ersten Mal eine Möglichkeit auf, Mängel bei der Grundlegung der Analysis konsequent zu vermeiden. Falls man Archimedes jemals Beweise aus der Frühzeit der Analysis vorgelegt hätte, gut möglich, dass er sich auf die Seite des Analysis-Kritikers George Berkeley geschlagen und die Unklarheiten und Probleme im Bereich der Grundlagen der Analysis deutlich moniert hätte.

13 Der Leser findet jedoch häufiger Fußnoten, die auf Literatur *mit* den Beweisen hinweisen.

14 *Hinweis*: Es gibt Autoren die vom Umfang des archimedischen *Œuvres* derart wenig beeindruckt sind, dass sie *ernsthaft* nach einer Erklärung dafür suchen, warum Archimedes kein größeres Gesamtwerk hinterlassen hat (vgl. Ivo Schneider: Archimedes. Springer Spektrum; 2. Auflage 2016. S. 14f). Dieses Papier hält das für einen ***etwas sonderbaren*** Ansatz und wird ***nicht*** nach einer Archimedes hindernden Produktivitätsbremse Ausschau halten.

Biografisches

A LIFE of Archimedes was written by one Heracleides, but this biography has not survived, and such particulars as are known have to be collected from many various sources. According to Tzetzes he died at the age of 75, and, as he perished in the sack of Syracuse (B.C. 212), it follows that he was probably born about 287 B.C. He was the son of Pheidias the astronomer and was on intimate terms with, if not related to, king Hieron and his son Gelon. It appears from a passage of Diodorus that he spent a considerable time at Alexandria, where it may be inferred that he studied with the successors of Euclid. It may have been at Alexandria that he made acquaintance of Conon of Samos (…) and of Eratosthenes.
Sir Thomas Heath[*]

Das Leben von Archimedes (ca. 287 – 212 v.Chr.) scheint sich, mit Ausnahme seines Aufenthalts in Alexandria, fast ausschließlich in Syrakus auf Sizilien abgespielt zu haben. Archimedes hat den Ersten wie den Ausbruch des Zweiten Punischen Kriegs erlebt:

> Unter Hieron II unternahm Syrakus im Jahr 264 v.Chr. einen Feldzug gegen im sizilischen Messina ansässige Mamertiner. Von den anfänglichen militärischen Erfolgen seiner Truppen konnte Hieron II allerdings nicht lange profitieren. Vielmehr wuchs sich dieser ursprünglich regionale Konflikt schnell zum Ersten Punischen Krieg aus (264 bis 241 v.Chr.). Die antiken Großmächte Karthago und Rom kämpften nun um die Vorherrschaft auf Sizilien. Und da hatte Syrakus, als vergleichsweise kleine sizilische Regionalmacht, das Nachsehen. Von römischen Truppen in die Defensive gedrängt, gelingt Hieron II ein Friedensschluss zu relativ moderaten Bedingungen: Freilassung der römischen Gefangenen, Rückgabe der frisch eroberten Gebiete, Zahlung von 100 Talenten, formelle Bundesgenossenschaft mit Rom. Syrakus beendet den Ersten Punischen Krieg als Verbündeter Roms.

Geht man von einem Geburtsjahr um 287 v.Chr. aus, dann war Archimedes beim Ausbruch des Ersten Punischen Kriegs ein junger Mann. Einen Teil des Ersten Punischen Kriegs dürfte Archimedes in Alexandria erlebt haben. Wann genau er am Museion in Alexandria (der Alexandrinischen Schule) Zeit verbrachte lässt sich nicht genauer eingrenzen.[15] Gelegentlich wird modern sogar angezweifelt, dass er je in Alexandria war.[16]

Archimedes erlebte auch den Ausbruch des Zweiten Punischen Kriegs. Seine Heimatstadt schlug sich in diesem Krieg auf die Seite Karthagos:

> Der Zweite Punische Krieg (218 – 202 v.Chr.) hatte für das Altertum eine ähnliche Bedeutung wie der Zweite Weltkrieg für die Moderne. Es handelte sich um eine Katastrophe von bisher nie dagewesenem Ausmaß, welche die Geopolitik des Mittelmeerraums auf den Kopf stellte. Für eine kurze Zeit sah es so aus, als ob Hannibal Rom erobern würde. Doch Rom überlebte triumphierend und war am Ende des Krieges so mächtig, dass es sämtliche Länder am Mittelmeer unter seine Gewalt gebracht hatte. Die Unabhängigkeit der griechischen Staaten war vorbei, die Zivilisation, die Archimedes repräsentierte, war gedemütigt. Einer der entscheidenden Wendepunkte des Kriegs war der Fall von Syrakus. Die führende griechische Stadt im westlichen Mittelmeerraum hatte durch ihre Allianz mit Karthago die falsche strategische Entscheidung gefällt. Im Jahre 212 v.Chr. erlag Syrakus nach einer langen Belagerung einem Verrat. Seine von Archimedes konstruierten Verteidigungsanlagen blieben im Kampf ungeschlagen. Wir wissen nicht genau wie, aber Archimedes kam dabei um.[17]

---

* Thomas Heath: The Works of Archimedes. Mineola, New York. Dover Publications 2002. S. xv f. Hinweis: Es geht hier mehr um die Bedeutung der Leistungen des Archimedes und weniger um philologische Details. Also wird Thomas Heath häufiger zitiert als Reviel Netz. Das (etwas überschätzte) Thema des „*Diagrammatischen*“ in der griechischen Mathematik wird weitgehend ignoriert. Das mag unmodern wirken, hat aber seine Vorteile.

15 Im *Lexikon der Naturwissenschaftler* des Spektrum Verlags aus dem Jahr 2000 findet sich (*ohne jede Quellenangabe*) im Archimedes Eintrag die Formulierung „studierte um 245 in Alexandria“.

16 *Naturgemäß* ist jede antike Quelle *anzweifelbar*. Das ist bequem zur Verlängerung von Publikationslisten nutzbar.

17 Reviel Netz & William Noel: Der Kodex des Archimedes. München. dtv 2010. S. 35. *Hinweis*: Es ist anzumerken, dass der Machtzuwachs, den Rom im Zweiten Punischen Krieg erfuhr, zwar enorm war, es aber noch ***über ein***

Da wir den Fall von Syrakus relativ zuverlässig auf 212 v.Chr. datieren können, gilt das Todesjahr von Archimedes gemeinhin als sicher. Dass Archimedes im Alter von 75 Jahren gestorben ist – jene Information die uns zur Berechnung seines ungefähren Geburtsjahrs dient – ist *keinesfalls* vergleichbar sicher. Die beste Quelle, die wir dafür haben, Johannes Tzetes, lebte im *12. Jahrhundert unserer Zeitrechnung*. Man weiß nicht, ob ihm entsprechend aussagekräftige, heute unbekannte antiken Quellen vorlagen oder ob die Zahl ***75*** einfach nur eine Eingebung war. Dass Archimedes relativ alt geworden ist, wissen wir jedoch auch unabhängig von diesem Gewährsmann aus dem 12. Jahrhundert.

Zum Ableben des Archimedes gibt es eine populäre Anekdote:

> Ein römischer Legionär wurde nach der Eroberung von Syrakus mit dem Auftrag, Archimedes zum römischen Befehlshaber Marcellus zu bringen, losgeschickt. Der Soldat fand das Genie in geometrische Studien vertieft und wurde von ihm mit den Worten „Zerstöre meine Kreise nicht / noli turbare circulos meos“ zurechtgewiesen. Daraufhin erschlug der verärgerte Legionär Archimedes.

Nett ausgedacht, aber wohl nicht mehr als eine Anekdote. Glaubwürdig ist hingegen, dass Archimedes seiner Heimatstadt als eine Art leitender Militäringenieur bei der Verteidigung gegen die Belagerung durch römische Truppen diente und beim Fall von Syrakus umkam. Dass die römischen Legionäre Archimedes als ihren Feind betrachteten, kann – auch wenn man der Anekdote zu seinem Tod keinen Glauben schenkt – als höchst glaubwürdig gelten.

In enger Anlehnung an Polybios lassen sich die unangenehmen Erfahrungen, die die Römer mit dem Ingenieurstalent von Archimedes machten, wie folgt zusammenfassen:

> Aufgrund ihrer zahlenmäßigen Überlegenheit meinten die Römer, Syrakus innerhalb weniger Tage einnehmen zu können. Doch „sie ahnten nicht, dass bisweilen ein einziger Verstand mehr bewirkt als eine noch so große Zahl von Händen“. Als sich nämlich die römischen Schiffe den Befestigungen von Syrakus näherten, kamen sie in die Reichweite der von Archimedes entworfenen Wurfmaschinen. „Segelten sie aus weiter Ferne heran, so beschädigte er sie durch die Geschosse der unter großer Spannung stehenden größeren Steinwurfmaschinen, was bei ihnen zu Ratlosigkeit und Komplikationen führte. Waren sie so nahe, dass diese Geschosse über sie hinwegflogen, setzte er passend zur jeweiligen Entfernung die kleineren Maschinen ein, was sie in eine solche Verwirrung stürzte, dass der Angriff vollständig zum Erliegen kam.“
>
> Als sie heimlich in der Nacht dennoch an die Stadtmauern kamen, wurden sie durch Bogenschützen und pfeilschießende Maschinen (sogenannte Skorpione), die durch die von Archimedes in der Stadtmauer angebrachten Schlitze feuerten, vertrieben. Doch gegen ein Schiff, das es in den toten Winkel der Wurfmaschinen geschafft hatte, konnte Archimedes noch eine weit eindrucksvollere Konstruktion einsetzen, eine kranartige Maschine, die eine am vorderen Ende des Auslegers „an einer Kette befestigte eiserne Hand herabließ, womit der, der den Ausleger lenkte, den Bug des Schiffes packte und hierauf innerhalb der Mauer den hinteren Teil der Maschine absenkte. Hatte er so erreicht, dass der Bug angehoben wurde und das Schiff senkrecht über dem Heck stand, fixierte er den hinteren Maschinenteil und ließ mittels eines Seils Hand und Kette plötzlich in die Tiefe stürzen.“ Die Folgen einer solchen Behandlung kann man sich vorstellen: Panik bricht aus, viele Schiffe kentern oder laufen voll Wasser. Dass die römischen Soldaten nicht gut auf Archimedes zu sprechen waren, darf also nicht verwundern.[18]

Alleine diese militärtechnischen Leistungen hätten Archimedes eine gewisse Aufmerksamkeit der Nachwelt gesichert. Und dabei war er vor allem ein theoretisch arbeitendes Genie. Ein Genie, das den meisten seiner praktischen Leistungen keine große Bedeutung beimaß.[19] Das hat zumindest Plutarch behauptet.

Jahrhundert dauerte *bis* „es sämtliche Länder am Mittelmeer unter seine Gewalt gebracht hatte“.

18 Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 34f.

19 Die praktischen Talente des Archimedes können ihm aber sein Leben auf vielfältige Weise erleichtert haben. Vielleicht waren es seine praktischen Talente, die ihm in Syrakus Zugang zum Kreis der Mächtigen verschafften.

Um so stolzer war Archimedes auf sein mathematisches Genie. Über den Bildungsweg des Genies wissen wir kaum mehr, als dass er mit einem Astronom als Vater wohl früh mit Mathematik in Berührung kam und später (so Diodor) eine Zeit lang am Museion weilte.

> Das Museion von Alexandria, die ihm angeschlossene Bibliothek und die unzähligen Beiträge der dort tätigen Gelehrten und Wissenschaftler existierten nur, weil Alexander [der Große; NF] die Stadt gegründet hatte und weil die Könige des hellenistischen Ägyptens über immense Ressourcen geboten, die sie [auch; NF] für die Entwicklung des Wissens zur Verfügung stellten.[20]
>
> Das Museion in Alexandria, von Ptolemaios I. als Zentrum des Wissens gegründet, war dem Palast angeschlossen und beherbergte die größte Bibliothek der Welt. Es versammelte Gelehrte aller Disziplinen, von Astronomie bis Zoologie, von Homer-Philologie bis Medizin. Die Begründer der alexandrinischen Schule für Medizin, Herophilos (ca. 331-280 v.Chr.) und Erasistratos (ca 304-250 v.Chr.), gaben einen Anstoß zu medizinischer Forschung, besonders durch die Praxis der Anatomie. Herophilos erkannte das Gehirn als kognitives Zentrum und revolutionierte das Wissen von den Gefäß- und Nervensystemen. Erasistratos, ursprünglich der Arzt von Seleukos I., der Antiochos Liebeskrankheit diagnostiziert hatte, war nicht nur auf dem Gebiet der Herzensangelegenheiten ein Experte, sondern untersuchte auch die körperlichen Funktionen dieses Organs. Er studierte den Blutkreislauf und unterschied zwischen Venen und Arterien.[21]

Das Museion war also keine auf Mathematik, Astronomie und Physik spezialisierte Einrichtung, sondern beherbergte Gelehrte mit diversen Schwerpunkten. Eine ähnlich hochkarätig besetzte Einrichtung gab es bei den Mittelmeerkulturen damals kein zweites Mal.

Wie Diodor erzählt, hat Archimedes während seiner Zeit in Ägypten die archimedische Schraube zur Förderung von Wasser erfunden.[22] Am Museion im ägyptischen Alexandria dürfte Archimedes auch die Kontakte zu jenen Wissenschaftlern geknüpft haben, die wir als Adressaten seiner mathematisch gehaltvollen Briefe kennen. Solche Briefe dienten ihm als Medium, um seine Resultate publik zu machen. Das war damals ein durchaus gebräuchliches Verfahren, um neue wissenschaftliche Einsichten zu veröffentlichen und Prioritätsansprüche anzumelden.[23]

> Es handelte sich um private Briefe, die an Leute in Alexandria verschickt wurden, deren Verbindungen für eine weitere Verbreitung des Inhalts sorgten. Alles beruhte auf diesem Netzwerk aus Einzelpersonen. (…) In vielen Briefen von Archimedes klingt leichte Verzweiflung an: Niemand, dem ich schreiben kann; kein adäquater Leser.[24]

Unter den Adressaten der Briefe finden wir zwei prominente Wissenschaftler der Antike:

- Eratosthenes von Kyrene, der einen brillanten Einfall zur Bestimmung des Erdumfangs hatte, sowie ein Verfahren zur Aufzählung von Primzahlen fand. Um 235 wurde Eratosthenes Direktor der Bibliothek von Alexandria.
- Konon von Samos, ein Astronom, mit dem sich Archimedes ganz besonders eng verbunden fühlte. Als dieser um 220 v.Chr. stirbt, verliert Archimedes einen wichtigen Freund und Geistesverwandten.

Ein dritter häufig auftauchender Adressat der Archimedes Briefe ist Dositheos, ein Schüler von Konon. An ihn sendet Archimedes seine Arbeit zur Bestimmung der Fläche unter der Parabel (Quadratur der Parabel), die er ursprünglich Konon zukommen lassen wollte.

> Archimedes grüßt Dositheos
>
> Da ich gehört habe, daß Konon gestorben ist, der mir immer eine herzliche Freundschaft bewiesen hat, daß du aber Konons vertrauter Freund und ein erfahrener Mathematiker seiest, trauerte ich um den Verstorbenen als um einen Freund und einen bewunderns-

20 Angelos Chaniotis: Die Öffnung der Welt. Darmstadt. wbg THEISS 2019. S. 11.

21 Angelos Chaniotis: Die Öffnung der Welt. Darmstadt. wbg THEISS 2019. S. 340.

22 Dass anderen Orts - außerhalb des Mittelmeerraums - damals schon Ähnliches im Gebrauch war, kann nicht ausgeschlossen werden. Falls dies der Fall war, hat Archimedes davon aber wohl kaum Kenntnis gehabt.

23 Dieses Verfahren war bis in die Neuzeit in Gebrauch. Noch in 17. Jahrhundert fungierte Mersenne als Postmeister und zentrale Anlaufstelle für neue Ideen. Er organisierte den Wissens-, Ideen- und Gedankenaustausch prominenter Wissenschaftler, die ihre einschlägigen Briefe jeweils an ihn richteten.

24 Reviel Netz & William Noel: Der Kodex des Archimedes. München. dtv 2010. S. 43.

> werten Mathematikers, und beschloß, dir die Untersuchung über ein Problem, die ich eigentlich Konon übersenden wollte, zuzustellen (…).[25]

Es ist kaum davon auszugehen, dass Archimedes im heimischen Syrakus Gesprächspartner hatte, mit denen er so etwas wie einen mathematischen Gedankenaustausch pflegen konnte. *Mathematiker* war damals kein besonders häufiger „Beruf". Und dann stellte Archimedes ja auch noch deutlich gehobene Ansprüche.

Neben seinen Briefpartnern blieb Archimedes also nur die Auseinandersetzung mit den mathematischen Größen der Vergangenheit. Unter seinen Vorläufern genoss Eudoxos die ganz besondere Wertschätzung des Archimedes. Der Ruf von Eudoxos als Mathematiker[26] gründet sich im wesentlichen auf drei Punkte:

- Eudoxos schuf die *Proportionenlehre,* jene Lehre, mit deren Hilfe man bereits in der Antike auch jene Größenverhältnisse behandeln konnte, die sich nicht durch rationale Zahlen ausdrücken ließen. Man denke z.B. an das Verhältnis von *Diagonale*:*Basis* im Quadrat ($\sqrt{2}$) oder an das Verhältnis von *Umfang*:*Durchmesser* beim Kreis (π).[27]
- Eudoxos war ein Meister der Exhaustion, der Näherung von Flächen und Volumina mittels geometrischer Konstruktionen zwecks *exakter* Bestimmung via *indirekter* Beweisführung. In mancherlei Hinsicht kann man in Exhaustion einen antiken Vorläufer unserer heutigen Integrationsmethoden sehen.[28]
- Eudoxos hat mittels seiner Fertigkeiten im Bereich Exhaustion wesentliche Beiträge zur Stereometrie geleistet, insbesondere war er es, der Demokrits Vermutung, dass ein Kegel ein Drittel des Volumens des umschreibenden Zylinders besitzt, bewies.

Das sind alles Themen, denen auch Archimedes großes Interesse entgegenbrachte. Aber da Eudoxos (ca. 408 – 347 v.Chr.) bei Archimedes' Geburt bereits länger verschieden war, konnte Archimedes zwar noch dessen Werke lesen, sich aber nicht mit ihm austauschen. Das Bild des in sich versunkenen Genies, das einsam über Probleme nachdenkt und unter einem Mangel an Gelegenheiten zum produktiven Gedankenaustausch leidet, mag im Fall von Archimedes viel Richtiges haben.

Immerhin genoss Archimedes das Privileg, zur Oberschicht einer wohlhabenden Stadt zu gehören und musste nicht fürchten, wegen der Brotlosigkeit seiner geliebten mathematischen Studien Hunger leiden zu müssen. Er konnte es sich bedenkenlos leisten, sich einen Großteil seiner Zeit über in den Sand gezeichnete Figuren zu beugen.

Plutarch erzählt uns, dass Archimedes bei der Versenkung in mathematische Probleme häufiger mal das Essen und die Körperhygiene vernachlässigte.

> Er war so entrückt, daß er fast immer zu essen vergaß und sein Äußeres vernachlässigte. Wenn es zu schlimm wurde, zwangen ihn seine Freunde zu baden und sich hinterher mit süßriechendem Öl einzureiben. Aber selbst dabei zog er sich in sich selbst zurück und zeichnete geometrische Figuren (…).[29]

Nun, wer würde es nicht in Kauf nehmen etwas zu müffeln, wenn man dafür etwas vom Genie des Archimedes abbekäme? Unglücklicherweise hat sich herausgestellt, dass vorsätzliche Vernachlässigung der Körperpflege allein noch niemand zum Genie macht.

---

25 Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. S.153. Einleitung des Briefs zur Quadratur der Parabel.

26 Eudoxos war vielseitig gebildet und abseits der Mathematik speziell als Schlüsselfigur der Astronomie bedeutend.

27 Zu seinen Beiträgen zur Mathematik vgl.: Euklid und die Elemente, insbesondere den Abschnitt *Buch X – Inkommensurables* auf www.antike-griechische.de.

28 Vgl. hierzu: Pythagoras & Co. - Griechische Mathematik vor Euklid, insbesondere den Abschnitt *Die Exhaustionsmethode* auf www.antike-griechische.de.

29 Plutarch: Marcellus und Lysander. Zitiert nach: Paul Strathern: Archimedes & der Hebel. Frankfurt am Main: Fischer Taschenbuch Verlag 1999. S. 32.

1. Kreismessung und archimedische Spirale

> Im wesentlichen baut die Arbeit des Archimedes direkt auf der zuerst von Eudoxos entwickelten Technik der „Exhaustion" auf. (…) Der elementarste Versuch des Archimedes in der Geometrie ist eine Untersuchung des Kreises, die der kurze Traktat *Über die Kreismessung* enthält.
> Wilbur Knorr[*]

Dieser Abschnitt zu *Kreismessung* und *archimedischer Spirale* soll nicht nur spezielle Resultate vorstellen, sondern vor allem mit einigen für *Archimedes typischen Vorgehensweisen* an möglichst *überschaubaren* Beispielen *vertraut machen*. Dazu gehört insbesondere die *Exhaustion*, die in diesem Papier bevorzugt als *geometrische Schachtelung*[30] (gegebenenfalls auch als *einseitige Approximation*) bezeichnet wird.[31]

Zum ersten Satz aus der Kreismessung liefert uns Archimedes einen recht einfachen Beweis. So einfach, dass dieser hier, nach einer minimalen Glättung durch einen zusätzlich eingeführten Hilfssatz, als *Beispiel* für *indirektes Beweisen* bei Archimedes näher betrachtet werden soll. Und zwar ohne, dass dadurch das mathematische Anspruchsniveau über Gebühr angehoben wird.

Kreismessung

Wir beginnen also den Streifzug durch die Respekt gebietende Hinterlassenschaft des Archimedes mit einem kleinen Satz aus der *Kreismessung*.[32] Bei Texten, die sich als philologische Studien verstehen oder die die beweistechnisch saubere Präsentation der archimedischen Beweise in den Vordergrund stellen, mag es gute Gründe dafür geben, andere Einstiege zu wählen. Für den hier verfolgten Zweck einer allgemeinbildenden und trotzdem nicht ganz anspruchslosen Einführung, ist das hier jedoch ein perfekter Einstieg:

> 1.1 Die Fläche eines Kreises mit Radius ***r*** und Umfang ***U*** ist gleich der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen ***r*** und ***U*** .

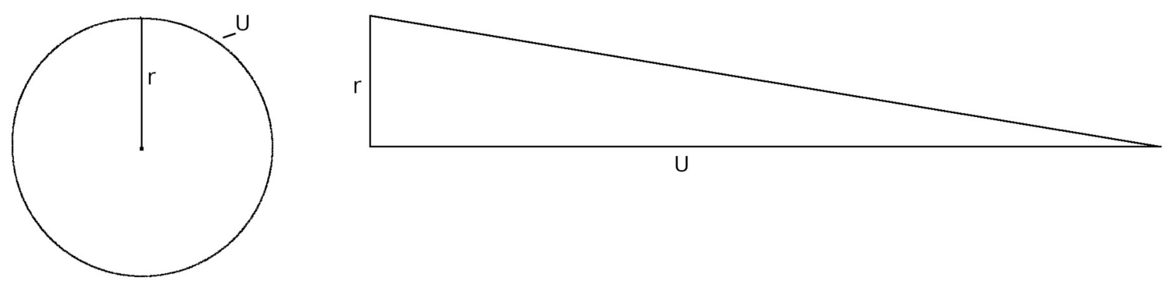

Schaubild 1: Flächengleiches Dreieck zu einem gegebenen Kreis

Mit den Formeln unserer Schulmathematik können wir diesen Satz sofort verifizieren. Die Formel für die Kreisfläche lautet πr^2 und die einschlägige Dreiecksfläche kann man mittels $\frac{1}{2} h_u U$ berechnen. Setzt man für h_u den Radius ***r*** und für ***U*** den Kreisumfang $2\pi r$ ein, ergibt sich die Formel für die Kreisfläche. Also haben wir Flächengleichheit.

So beweist Archimedes den Satz natürlich ***nicht***. Der formelmäßige Umgang mit geometrischen Sachverhalten ist erst deutlich später aufgekommen und wurde erst mit

---

* Wilbur Knorr: Archimedes; in: Das Wissen der Griechen. München. Fink 2000. S. 499f.

30 Dijksterhuis propagiert stattdessen die (mit Fehlassoziationen beladene) Bezeichnung *Kompressionsmethode*.

31 Die Bezeichnung *Exhaustion* kam erst im 17. Jh. auf (vgl. R. Thiele in Jahnke (Hrsg): Geschichte der Analysis. Heidelberg, Berlin. Spektrum Verlag 1999. S.23), stammt also keinesfalls von den Alten. Dijksterhuis weist in einer Abhandlung zu Archimedes zurecht darauf hin, dass dieser Name *völlig falsch und irreführend* ist (Veröffentlichungen der Gesellschaft für Internationale Wissenschaftsgeschichte, Bremen. 1952 Heft 1. S. 11).

32 *Kreismessung* ist ein kurzer Text. Die Überlieferungsgeschichte der häufig etwas stiefmütterlich behandelten Abhandlung weist aus philologischer Sicht diverse Probleme auf. Sie wurde nur unvollständig überliefert und das was überliefert wurde, scheint durch Kopisten erheblich verändert worden zu sein. Das ist aber hier alles unerheblich.

den Erfolgen der von Descartes propagierten analytischen Geometrie zu mathematischem Allgemeingut. Eine Formel mit einer irrationalen Größe wie ***π*** wäre Archimedes zudem vermutlich etwas unseriös erschienen.[33]

Wenn man die von Archimedes gefundene Beziehung unbedingt formelhaft ausdrücken will, dann besser als: A = ½ $r * U$

wobei ***A*** für Kreisfläche, ***r*** für Kreisradius und ***U*** für Kreisumfang steht.[34]

Auch wenn auf die wortgetreue Wiedergabe des Beweises verzichtet wird, so soll hier *ausnahmsweise* die Beweisstruktur gründlich aufgeklärt werden.[35]

Der Grund: Das für Archimedes so ***typische*** Muster des Zusammenspiels von ***geometrischer Schachtelung*** und ***doppelte reductio ad absurdum***, kann hier an einem Beispiel mit recht überschaubarer Komplexität vorgestellt werden. Die *doppelte reductio ad absurdum* weist dabei hier folgende Grundstruktur auf:

(i) Die Annahme, dass die Kreisfläche größer als die Fläche des einschlägigen Dreiecks sei, führt zu einem Widerspruch.

(ii) Die Annahme, dass die Kreisfläche kleiner als die Fläche des einschlägigen Dreiecks sei, führt ebenfalls zu einem Widerspruch.

Folglich muss die Kreisfläche ***gleich*** der Fläche des einschlägigen Dreiecks sein.

Bei der Herleitung des Widerspruchs nutzt Archimedes (in beiden Teilen seines indirekten Beweises) eine zuvor in Anschlag gebrachte ***geometrischen Schachtelung***. Dabei geht es dabei zunächst einmal nur um die geometrische Näherung des Kreises. Dass geometrische Näherungen im Beweis verwendet werden, bedeutet jedoch *nicht zwangsläufig*, dass das Resultat des Beweises auch nur eine Näherung sein kann. Es ist möglich, *geometrische Schachtelungen* im Rahmen von Widerspruchsbeweisen so einzusetzen, dass *exakte* Resultate bewiesen werden. Eine gute Beweisidee vorausgesetzt, kann man *geometrische Schachtelungen* im Rahmen indirekter Beweise dazu verwenden, um zu zeigen, dass *ein ganz genau bestimmter Sachverhalt* der Fall sein muss, weil alles andere zu einem Widerspruch führt. So hatte schon Eudoxos bewiesen, dass das Volumen des Kegels ***genau*** 1/3 des Volumens des umschreibenden Zylinders beträgt.

Der Dreh- und Angelpunkt des hier interessierenden Beweises von Archimedes ist, dass – wie die antiken Griechen schon länger wussten – Kreise durch regelmäßige Vielecke (reguläre Polygone) sowohl von innen wie von außen *beliebig* genau genähert werden können. Es bleibt zwar immer eine Differenz, diese kann aber (indem man die Eckzahl der verwendeten regelmäßigen Vielecke immer weiter steigert) unter jeden vorgegebenen Wert gedrückt werden. Ist die gegebene Näherung (für den verfolgten Zweck) noch nicht gut genug, dann kann man die Anzahl der Ecken des Polygons einfach immer weiter verdoppeln.[36]

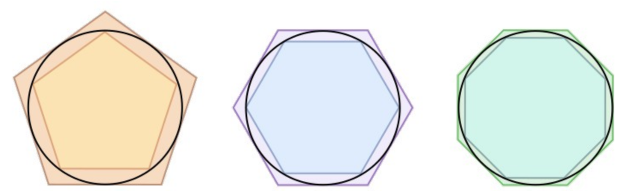

Schaubild 2: Beispiele für einem Kreis einbeschriebene und umbeschriebene reguläre Polygone

33 Und Archimedes hätte damit bis ins 19. Jahrhundert hinein sogar recht gehabt. Irrationale Zahlen wie π wurden erst sehr spät auf eine solide Grundlage gestellt. Besonders zu erwähnen ist hierbei Dedekind (*Dedekindsche Schnitte*).

34 Diese Formel kann man auch so lesen, dass die beiden *Proportionalitätsfaktoren*, jener für den Anstieg der Kreisfläche ***A*** mit $\boldsymbol{r^2}$ und jener für den Anstieg des Umfangs ***U*** mit **2*r***, übereinstimmen müssen. Obwohl Archimedes solche Formeln nicht benutzte, könnte er bemerkt haben, dass sein Satz die Übereinstimmung dieser beiden Proportionalitätsfaktoren sichert. Vgl.: Wolfram Koepf: Vorlesungsmanuskript WS 2007/2008 Kassel. S. 6.

35 Einen vollständigen Beweis findet man in: Thomas Heath: The Works of Archimedes. Mineola, New York. Dover Publications 2002. S. 91f. bzw. Thomas Heath: Archimedes' Werke (deutsch). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 231ff ; Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 83ff (speziell S. 88). *Abgeraten* wird von der Version in der Übersetzung durch F. Rudio in: Archimedes: Werke. Darmstadt. WBG 1983. S. 369ff.

36 Zu einer solchen Verdopplung gibt es ein einfaches, konstruktives Verfahren. (Vgl. z.B.: http://www.math.uni-bremen.de/didaktik/ma/ralbers/Veranstaltungen/Aarchiv/AusgewAnw/Material/piApprox.pdf S.9.)

Einbeschriebene reguläre Polygone haben jeweils eine kleinere Fläche als der Kreis, umbeschriebene reguläre Polygone übersteigen hingegen mit ihrer Fläche die des Kreises.
Sei ε (mit ε>0) ein Wert (der in einer frei gewählten Einheit) eine beliebig kleine Fläche beschreibt, so existieren mit Sicherheit reguläre Polygone, deren Flächen um weniger als ε von der Kreisfläche abweichen. Es existieren dabei sowohl einbeschriebene reguläre Polygone deren Fläche jene des Kreises um *weniger* als ε unterschreiten, wie auch umbeschriebene reguläre Polygone deren Fläche die Kreisfläche um *weniger* als ε übersteigen. Diesen Umstand kann man nutzen, um durch indirekte Beweisführung (sprich: durch Konstruktion eines Widerspruchs) *auszuschließen*, dass die Kreisfläche größer oder kleiner als die einschlägige Dreieckfläche ist.

Bevor wir der Konstruktion des Widerspruchs näher treten, soll hier noch ein Hilfssatz eingeführt werden, und zwar einer der im überlieferten Text der *Kreismessung* so überhaupt *nicht auftaucht*, aber trotzdem den Zugang sowohl zu Satz wie Beweis deutlich erleichtert.

> 1.1a (Hilfssatz): Sei ein reguläres, n-eckiges Polygon (n>3) mit dem Mittelpunkt ***M*** gegeben, bezeichne ***a*** eine Seite des Polygons, und $\boldsymbol{h_a}$ die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks über ***a*** mit dem Eckpunkt ***M***, dann ist die Fläche des regulären Polygons gleich der eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\boldsymbol{h_a}$ und ***na*** (= Umfang des Polygons = $\boldsymbol{U_P}$).

Ein Beispiel soll den Gehalt des Hilfssatzes verdeutlichen:

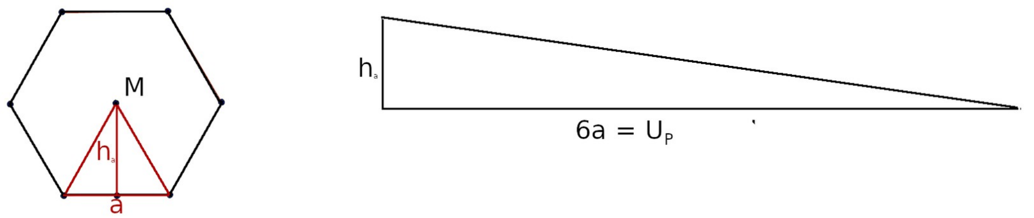

Schaubild 3: Beim regulären Sechseck ist die Fläche gleich der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten h_a und 6a (= Umfang des Polynoms = U_P)

Der Hilfssatz 1.1a ist eine Art Gegenstück zu 1.1, nur dass es hier eben um reguläre Polygone und nicht um Kreise geht.

Um diesen Hilfssatz einzusehen reicht es, sich – unter Erinnerung an die Mathematik des Mittelstufenstoffs – folgendes klar zu machen:

- Jedes reguläre n-eckige Polygon lässt sich in n Bestimmungsdreiecke zerlegen. Ein Bestimmungsdreieck ist immer ein gleichschenkliges Dreieck. Es ergibt sich dadurch, dass man die Endpunkte einer – der hier jeweils mit ***a*** bezeichneten - Seite des Polygons mit dessen Mittelpunkt ***M*** verbindet. (Das Bestimmungsdreieck im Sechseck des obigen Beispiels ist – samt seiner Höhe $\boldsymbol{h_a}$ - rot hervorgehoben.)
- 2n solcher Bestimmungsdreiecke lassen sich zu einem Parallelogramm zusammenfügen. Dazu geht man analog zur Packung von Tortenstücken an der Verkaufstheke des Konditors vor: Man wechselt beständig zwischen zwei Orientierungen hin und her.
- Ein solches Parallelogramm ist flächengleich zum Rechteck mit den Seiten $\boldsymbol{U_P}$ (Umfang des Polygons = n mal Seitenlänge des Polygons) und $\boldsymbol{h_a}$ (wobei $\boldsymbol{h_a}$ die Höhe des Bestimmungsdreiecks über der Polygonseite ***a*** ist).
- Dieses Rechteck hat die *doppelte* Fläche des Polygons.
- Zerlegt man dieses Rechteck entlang einer Diagonalen in zwei rechtwinklige Dreiecke, so hat jedes der beiden Dreiecke die Fläche des Polygons und weist die Katheten $\boldsymbol{h_a}$ und $\boldsymbol{U_P}$ auf.

Und genau dies ist die Behauptung des Hilfssatzes 1.1a. Nach diesen Hinweisen soll der Hilfssatz als gesichert gelten.

Kommen wir nun zum Widerspruch, der sich ergibt, wenn man – abweichend von 1.1 – annimmt, ein Kreis sei ***größer*** als das einschlägige, rechtwinklige Dreieck mit den Katheten ***r*** und ***U***:

Wenn der Kreis *größer* ist als das *einschlägige* Dreieck, ***dann*** muss es dem Kreis *einbeschriebene* reguläre Polygone geben, die *größer* als das Dreieck sind. Sei ε der Wert, um den der Kreis größer als das *einschlägige* Dreieck sei, dann sind auch die dem Kreis *einbeschriebenen*, regulären Polygone, deren Fläche um *weniger* als ε von der Kreisfläche abweichen, *größer* als das *einschlägige* Dreieck. Solche regulären Polygone müssen, wenn sie existieren, *zugleich* auch dem Hilfssatz 1.1a genügen. Sie sind also gemäß 1.1a jeweils gleichgroß zu einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten h_a und U_P.

Bei jedem einem Kreis *einbeschriebenen*, regulären Polygon ist die Höhe $\boldsymbol{h_a}$ kleiner als der Radius ***r*** des Kreises. Im Bestimmungsdreieck haben Schenkel die Länge ***r***. Zudem sind $\boldsymbol{h_a}$ und ***a/2*** die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse ***r***.

Bei jedem einem Kreis *einbeschriebenen* regulären Polygon ist der Umfang $\boldsymbol{U_P}$ kleiner als der Kreisumfang. Die Seiten des Polygons *kürzen* ja als Kreissehnen jeweils das zugehörige Stück Kreisbogen ab.

Also: Wenn der Kreis größer ist als das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten ***r*** und ***U***, dann muss es dem Kreis eingeschriebene reguläre Polygone geben, die ***größer als dieses Dreieck*** sind. Diese müssen aber ***zugleich*** flächengleich zu einem rechtwinkligen Dreieck sein, welches ***ins Innere genau dieses einschlägigen Dreiecks passt***. Es muss demnach reguläre Polygone geben, welche ***zugleich*** *größer* wie *kleiner* sind als das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten ***r*** und ***U***.

Widerspruch! Folglich kann der Kreis nicht größer als das einschlägige Dreieck sein.

Damit wäre Punkt (i), der erste Teil, der doppelten *reductio ad absurdum* erledigt.

Auf vergleichbare Erläuterungen zu Punkt (ii) – der Kreis kann auch nicht kleiner als das einschlägige Dreieck sein – wird verzichtet. Das gäbe für die hier verfolgten Zwecke zu wenig Neues her.[37] Die allgemeine Beweisstruktur die Archimedes beim Beweis des Satzes 1.1 verwendet, sollte auch so hinreichend deutlich geworden sein.

Bleibt die Frage, wie kam Archimedes auf die Idee zu diesem Satz?

Kognitionswissenschaftliche Spekulationen, bei denen ein Zeitraum von mehr als 2.000 Jahren überbrückt werden muss, sind selbstverständlich mit Vorsicht zu genießen. Es lässt sich trotzdem festhalten, dass man kein besonderes Risiko eingeht, wenn man unterstellt, dass der im Hilfssatz 1.1.a formulierte Sachverhalt Archimedes präsent war, als er den Satz 1.1 formulierte. Reguläre Polygone gehörten - als eigenständiges Thema wie als beständig benutztes Werkzeug – zum mathematischen Alltag von Archimedes. Damit kannte er sich aus.[38]

Betrachtet man nun einen gegebenen Kreis und nähert dessen Fläche – in Gedanken – durch einbeschriebene, reguläre Polygone mittels beständig wiederholter Verdopplung der Eckzahl, so nähern sich die entsprechenden flächengleichen Dreiecke (s. Schaubild 3) dem Dreieck aus Satz 1.1 immer mehr an. Sie bleiben dabei kleiner und können stets im Inneren des Dreiecks aus 1.1 platziert werden. Aber die Differenz nimmt immer weiter ab.

37 Nicht, dass es da nichts Sinnvolles zu lernen gäbe, aber weder eine Rekapitulation von Schulmathematik noch eine Einführung in geometrisches Beweisen sind das Thema dieses Papiers. Und in anspruchsvolleren mathematischen Kontexten heißt es an solchen Stellen ja sowieso immer: *der verbleibende Fall lässt sich analog beweisen, was dem Leser zur Übung empfohlen sei.*

38 Der hier als Hilfssatz 1.1a eingeführte Sachverhalt liefert z.B. auch eine bequeme Plattform zur Quadratur von regulären Polygonen. Die Bestimmung eines flächengleichen Quadrats (die Quadratur einer Figur) war in der antiken Mathematik eine Standardprozedur, um Größenvergleiche durchführen zu können.

Nähert man in analoger Weise die Kreisfläche mittels umbeschriebener, regulärer Polygone, dann nähern sich die Dreiecke aus dem Hilfssatz 1.1a ebenfalls an das Dreieck aus 1.1 an, bleiben aber stets größer als dieses und können es stets aufnehmen.

M.a.W.: Man erhält so etwas wie *eine geometrische Version einer Intervall-Schachtelung* zum Dreieck aus 1.1.

Entfernen wir nun aus diesem Bild der geschachtelten Dreiecke das spezielle Dreieck aus dem Satz 1.1. Was bleibt übrig? Einerseits eine Sequenz von Dreiecken die kleiner sind als der betrachtete Kreis und von denen Archimedes weiß, dass ihre Katheten gen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{U}$ wachsen, andererseits eine Sequenz von Dreiecken, die größer sind als der betrachtete Kreis und von denen Archimedes weiß, dass ihre Katheten zum einen jeweils gleich $\boldsymbol{r}$ sind,[39] zum anderen gen $\boldsymbol{U}$ schrumpfen.

Da erscheinen der Satz 1.1 und sein Beweis plötzlich ganz naheliegend. Betrachtet man die Näherung eines Kreises durch reguläre Polygone vor dem Hintergrund von 1.1a, dann können auch Mathematiker mit weniger Talent als Archimedes zum Satz 1.1 vorstoßen.

Durchdenkt man den bei Archimedes unerwähnt bleibenden Hilfssatz 1.1a (ein vorsätzlich *unerwähnt gebliebener* Hilfssatz?), so erhält man also sowohl einen plausiblen Hinweis zur Frage, was Archimedes zum Satz, wie auch zur Frage, was ihn zum Beweisgang inspiriert haben könnte. Ein derart zugänglicher Beweisgang, der dann auch noch verständlich macht, wie man auf die Idee zum Satz kommen kann, ist bei Archimedes eher selten.

Bei vielen *anderen* Sätzen, die Archimedes per *doppelter reductio ad absurdum* beweist, wird der Leser zur Frage, wie Archimedes auf die Idee zum Satz und/oder zum Beweisgang kam, dem *Beweisgang selbst* kaum Hilfreiches entnehmen können. Man steht typischerweise zunächst einmal einfach nur ratlos vor der Frage, wie, verdammt noch einmal, ist er auf den Einfall zu diesem Satz bzw. zu diesem Beweisgang gekommen. Schopenhauer – der sich auch mit Mathematik-Didaktik beschäftigte – hat für solche Beweise den Begriff *Mausefallenbeweis* geprägt. Der Beweis ist gelungen, der Satz ist richtig, aber der Leser kann den Beweis *nicht* mit dem Gefühl eines neu zugänglich gewordenen Argumentationsbogens nachvollziehen. Man kann jeden Beweisschritt als korrekt abhaken und dabei trotzdem am Ende *ohne* das Gefühl eines „Jetzt habe ich es verstanden" dastehen. Nicht nur Archimedes auch Gauß hat seine Leser gern mit derartigen Mausefallenbeweisen gequält. Ein spezielles Hobby von Jahrtausend-Genies?[40]

Allerdings: Zur Frage, woher Archimedes seine Inspirationen nahm, ist man, dank eines erst 1906 erschlossenen Palimpsests, heute vergleichsweise gut informiert. Das Genie hat in seiner dort enthaltenen *Methodenlehre* nämlich aus dem Nähkästchen geplaudert. Das wird in diesem Papier häufiger ausgenutzt.

Bevor dieser Text nun zum Thema *archimedische Spirale* wechselt, noch ein zweiter Satz aus der *Kreismessung.* Und zwar einer, bei dem es um **numerische Näherung** geht. Das lohnt sich hervorzuheben, da die Beschäftigung mit numerischen Näherungen den meisten Geometern der Antike wohl als eine nicht besonders edle Tätigkeit galt und es so etwas wie **numerische Näherungen** in der Geometrie lange Zeit kaum oder gar nicht gab.

Um das Verhältnis von *Kreisumfang* zu *Kreisdurchmesser* zu nähern, hat Archimedes die Näherung eines Kreises mit einem umbeschriebenen regelmäßigen 96-Eck und einem einbeschriebenen regelmäßigen 96-Eck analysiert. Theoretisch war die Konstruktion keine Herausforderung. (Er hat dazu, von regulären Sechsecken ausgehend, die Eckzahl vier-

39 Beim einem Kreis mit Radius $\boldsymbol{r}$ gilt für alle umbeschriebenen regulären Polygone $\boldsymbol{h_a} = \boldsymbol{r}$.

40 Die gründliche Analyse brillanter Beweise kann die eigene mathematische Problemlösungskompetenz beträchtlich verbessern. Mausefallenbeweise wirken so, als wollten sie einen solchen Kompetenzzuwachs beim Leser eher sabotieren denn befördern. Das kann, muss aber nicht Absicht sein. Man muss den großen Pionieren der Mathematik schon auch zubilligen, dass sie bei grundlegend neuen Resultaten häufig kaum eine Chance haben, anders als per *reductio ad absurdum* zu beweisen. Und solche indirekten Beweise, zumal wenn sie eine gewisse Komplexität haben und reichlich Hilfssätze benötigen, gelten als von Natur aus schlechter zugänglich als direkte Beweise.

mal verdoppelt.) Aber um die gesuchte Näherung zu erhalten, mussten dann Berechnungen durchgeführt werden. Allein das dabei erforderliche Hantieren mit Näherungen für so Größen wie $\sqrt{3}$ war in der Antike eine echte Herausforderung.

Der Aufwand der hinter dem Ergebnis steckt, ist angesichts der damals verfügbaren Rechenmethoden erheblich. Das Ergebnis der mühseligen Arbeit lautete:

> 1.2 Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß als der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als ein Siebentel, aber um mehr als zehn Einundsiebenzigstel des Durchmesser.[41]

Man kann diese sehr dicht beim Original liegende Übersetzung, mit vertretbarer Nutzung der Freiheiten eines Übersetzers, kürzen zu:

> 1.2 (Alternative Formulierung) Das Verhältnis des Umfangs eines jeden Kreises zu seinem Durchmesser ist kleiner als 3 $\frac{1}{7}$, aber größer als 3 $\frac{10}{71}$.[42]

Im Vertrauen auf die Bändigung der irrationalen Zahlen, sowie unter Nutzung des Wissens, dass π sowohl der Proportionalitätsfaktor ist, mit dem Kreisflächen proportional zu r^2 sind, wie jener Faktor der Kreisdurchmesser und Kreisumfang verbindet, können wir dies modern notieren als: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$

Das ist besser als $\pi \approx 3{,}14$.

Archimedische Spirale

Die Abhandlung zur *Kreismessung* umfasst nur drei Sätze,[43] von denen zwei hier vorgestellt wurden. Im Vergleich dazu ist *Über Spiralen* mit seinen 28 Sätzen voluminös.[44] Es sollen aber wieder nur *zwei* zentrale Sätze herausgegriffen und kurz vorgestellt werden.

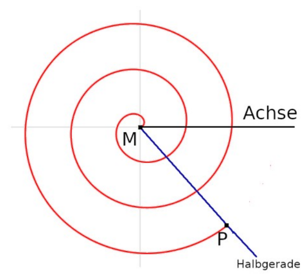

Schaubild 4: Archimedische Spirale

Die archimedische Spirale ist eine sogenannte *mechanische (bewegungsgeometrisch definierte) Figur*. Sie lässt sich **nicht** allein mit *Zirkel und Lineal* erzeugen.

Schon vor Archimedes war es in der griechischen Mathematik üblich, bei konstruktiven Aufgaben, für die man im Rahmen von *nur mit Zirkel und Lineal* keine Lösung fand, konstruktive Lösungen mittels *mechanischer Figuren* vorzulegen.[45]

Wir wissen heute, dass es bei vielen Problemen und gerade bei den drei klassischen Problemen der griechischen Mathematik (*Dreiteilung eines beliebigen Winkels, Verdopplung eines Würfels, Quadratur des Kreises*) nie eine Chance gab, sie einer konstruktiven Lösung allein mit *Zirkel und Lineal* zuzuführen.[46] Um überhaupt *konstruktive Lösungen* finden zu können, musste man sich von der strikten Beschränkung auf die Konstruktionsmittel *Zirkel und Lineal* abwenden. Und so wurde das Dogma *nur mit Zirkel und Lineal* langsam aufgeweicht. Archimedes war mit der Verwendung der nach ihm

41 Archimedes: Werke. Darmstadt. WBG 1983. S. 371. (Übersetzung F. Rudio)

42 Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 233.

43 Das gilt zumindest für das, was uns überliefert wurde. Das Original könnte umfangreicher gewesen sein.

44 Archimedes hat die Resultate zur archimedischen Spirale in einem Brief an Dositheos bewiesen. Dieser Brief bzw. die enthaltene Abhandlung wird heute allgemein mit *Über Spiralen* betitelt.

45 Insbesondere die *Quadratrix* war eine wichtige *mechanische Figur*. Mit ihrer Hilfe gelang die Dreiteilung beliebiger Winkel wie die *Quadratur des Kreises*. Beides Probleme, die mit *Zirkel und Lineal* alleine nicht zu lösen sind. Vgl.: Pythagoras & Co. - Griechische Mathematik vor Euklid Abschnitt: Euklid und die gemiedenen Lösungen klassischer Probleme auf www.antike-griechische.de.

46 Vgl. hierzu z.B. den Nachweis der *Transzendenz* von *π* durch Lindemann, woraus die Unmöglichkeit der Quadratur eines Kreises allein mit *Zirkel und (unmarkiertem) Lineal* folgt.

benannten Spirale keineswegs der erste, der eine *mechanische Figur* in seinen Beweisen nutzte.[47]

Die archimedische Spirale entsteht als Produkt der *Überlagerung zweier Bewegungen*. In moderner Sprechweise kann man die archimedische Spirale wie folgt charakterisieren:

> Erzeugt wird eine solche Spirale, indem man eine Halbgerade mit konstanter Geschwindigkeit um einen festen Punkt *M* dreht und dabei auf dieser Halbgeraden mit ebenfalls konstanter Geschwindigkeit einen Punkt *P* von *M* wegbewegt. Den Punkt M nennt Archimedes den Mittelpunkt der Spirale. Die Ausgangslage der Halbgeraden nennen wir die *Achse* der Spirale.[48]

Zum Vergleich, eine nur mäßig modernisierte Übersetzung der Definition bei Archimedes:

> Wenn sich ein Halbstrahl (*Halbgerade*) in einer Ebene um seinen Endpunkt (*M*) mit gleichförmiger (*konstanter*) Geschwindigkeit dreht, nach einer beliebigen Zahl von Drehungen wieder in die Anfangslage zurückkehrt und sich auf dem Halbstrahl ein Punkt (*P*) mit gleichförmiger (*konstanter*) Geschwindigkeit, vom Endpunkt (*M*) des Halbstrahls beginnend, bewegt, so schreibt dieser Punkt (*P*) eine „Spirale".[49]

Es fällt auf, dass Archimedes *hier* nur jene Figuren ausdrücklich „Spirale" nennt, die durch **ganzzahlige** Umdrehungen des Halbstrahls (der Halbgeraden) entstehen. Diese Einschränkung ist nicht sehr erheblich, wirkt modern jedoch unnatürlich. Es spricht auch nichts dagegen die archimedische Spirale allgemeiner aufzufassen als Archimedes dies *hier* tut.[50]

Speziell interessiert sich Archimedes für die Figur, die bereits nach **einer** vollen Umdrehung der Halbgeraden um den Mittelpunkt ***M*** entstanden ist. Er nennt dies die *Spirale erster Umdrehung*. An Hand dieser Figur definiert er den *ersten Kreis*. Das ist jener Kreis, der ***M*** als Mittelpunkt besitzt und dessen Kreislinie nun den – auf der Halbgeraden – linear aber auch um genau 360° bewegten Punkt ***P*** beinhaltet. Die gerade Strecke zwischen ***M*** und ***P*** (erste Strecke) ist der Radius ***r*** dieses Kreises (s. Schaubild 5).

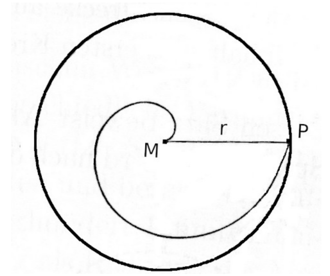

Schaubild 5: Erste Umdrehung – erste Spirale – erster Kreis – erste Strecke (r)

Der größte Teil der von Archimedes zur Spirale erzielten Resultate lässt sich bereits im Rahmen von *erster* Umdrehung, *erster* Spirale, *erstem* Kreis und *erster* Strecke erläutern.

Bevor wir zu den zwei zentralen Sätzen zur archimedischen Spirale kommen, sei noch auf eine Eigenschaft dieser Spirale hingewiesen, die Archimedes *nicht* ausdrücklich behandelt:

Die archimedische Spirale weist einen höchst interessanten Zusammenhang zwischen dem *Abstand* des Spiralpunktes ***P*** vom Mittelpunkt ***M*** und dem *Winkel* der Drehung der Halbgeraden auf:

> Drehen wir unsere Halbgerade um den doppelten Winkel, verdoppelt sich der Abstand des Spiralenpunktes vom Mittelpunkt M, beim dreifachen Winkel verdreifacht sich der Abstand. Allgemein ausgedrückt: Die Drehwinkel verhalten sich wie die Abstände der entsprechenden Spiralenpunkte von M, Drehwinkel und Abstand sind also zueinander proportional.[51]

Wenn dort also der Drehwinkel proportional zu einer Strecke ist, kann die archimedische Spirale dann nicht auch zur konstruktiven *Teilung von Winkeln* genutzt werden? Mit *Zirkel und Lineal* eine *Strecke* in drei gleiche Teile zu teilen, gehörte schon deutlich vor Archimedes zu den Standardübungen in der griechischen Geometrie. Kann man darauf

47 Wie wir von Pappos von Alexandria wissen, stammt die Idee zur *archimedischen Spirale* ursprünglich von *Konon*, dem Freund und Briefpartner von Archimedes. Aber es war Archimedes, der die Sätze zu dieser Spirale bewies und nach dem sie benannt wurde.

48 Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 126.

49 Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. S. 26. Aus: Über Spiralen, Ende § 11., Definitionen. *Kursive* Klammereinschübe nicht im Original.

50 Es gibt Stellen, da weicht Archimedes selbst die Beschränkung auf **ganzzahlige** Umdrehungen deutlich auf.

51 Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 126.

aufbauend dann nicht die von der archimedischen Spirale gelieferte Proportionalität zwischen Strecke und Winkel zur *Dreiteilung eines beliebigen Winkels* nutzen? Man kann![52] Man kann mittels archimedischer Spirale sogar einen beliebigen Winkel in beliebig viele Teile teilen. Und diese Möglichkeit zur Nutzung der archimedischen Spirale war bereits antiken Mathematikern bekannt.

> Entsprechend läßt sich auch die Spirale zur Teilung eines beliebigen Winkels in beliebig viele gleiche Teile benutzen: man braucht statt des Winkels nur den zugehörigen Radiusvektor zu teilen. Daß das in der Antike bereits bemerkt wurde berichten Pappos (…) und Proklos (…).[53]

Warum weist Archimedes nicht darauf hin, dass mit seiner Spirale ein (weiteres) Hilfsmittel zur Lösung des klassischen Problems *Dreiteilung eines beliebigen Winkels* zur Verfügung steht? Hat er dies übersehen? Hat ihm seine Definition der archimedischen Spirale mit der Betonung voller Umdrehungen den Blick dafür verstellt?

Wenn man unbedingt will, so kann man dies glauben. Man kann allerdings auch bedenken, dass es beim Großteil der erhaltenen Archimedes Briefe nicht vorrangig um die Verbreitung von Lehrtexten oder um die Vorstellung allgemeiner mathematischer Erörterungen zu spezifischen Themen ging, sondern dass das Anmelden von *Prioritätsansprüchen* der entscheidende Punkt war!

Anerkannte Prioritätsansprüche, die traditionelle Grundlage für Ansehen und Ruhm eines Mathematikers, waren Archimedes wichtig. Er hat sogar versucht, jene Mathematiker bloßzustellen, die sich im akademischen Wettbewerb um Prioritätsansprüche – wie Archimedes unterstellte – unlauterer Mittel bedienten und ihm grundlos die Anerkennung seiner Prioritätsansprüche verweigerten.

Häufig meldete Archimedes seine Prioritätsansprüche zunächst nur dadurch an, dass er in seinen Briefen mitteilte, bei welchen Sätzen ihm ein Beweis gelungen sei, ohne dabei den Beweis selbst vorzulegen. Um nun akademische Wettbewerber, die daraufhin unbegründet den Anspruch erhoben, diese Resultate seien ihnen schon länger bekannt und von ihnen selbst (bereits vor Archimedes) bewiesen worden, bloßzustellen, hat Archimedes vorsätzlich *Unmögliches* in solche Listen von – ohne Beweis mitgeteilten – neuen Sätzen eingeschmuggelt.

> Er pflegte von Syrakus aus seine mathematischen Entdeckungen schriftlich dem Konon [wie einigen anderen Adressaten in Alexandria; NF] mitzuteilen, meistens zuerst ohne Beweis, weil er, wie er selbst in der Einleitung zu der Arbeit *Über Spiralen* schreibt, «gerne jedem Mathematiker das Vergnügen gönnen möchte, es selber zu erfinden». Aber um seinen eingebildeten alexandrinischen Kollegen ein Bein zustellen, fügte er hie und da auch falsche Lehrsätze hinzu, «damit diejenigen, die behaupteten, das alles selber entdeckt zu haben, ohne aber die Beweise hinzuzufügen, auch einmal hereinfallen, indem sie behaupteten, etwas gefunden zu haben, das unmöglich ist.»[54]

Wenn Anmeldung und Durchsetzung von Prioritätsansprüchen das Thema sind, dann ist das Potential der archimedischen Spirale bezüglich einer *Dreiteilung beliebiger Winkel* ziemlich uninteressant. Das Problem war bereits früher und auf der Grundlage einer anderen *mechanischen Figur* (der *Quadratrix*) von Hippias von Elis gelöst worden.[55]

Dass Archimedes die Mitteilung „*und von nun an kann man die Dreiteilung eines beliebigen Winkels* ***zusätzlich*** *auch mittels meiner Spirale durchführen*“ in puncto Prioritätsansprüche für wenig ergiebig hielt, erscheint nachvollziehbar. Dass er auf die Erwähnung dieser Nutzungsmöglichkeit der Spirale verzichtet hat, ist, so gesehen, ganz natürlich und muss keineswegs bedeuten, dass er dies übersehen hat.

52 Siehe z.B. http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/spiralen3/Winkeldreiteilung.htm.
53 Heltmuth Gericke: Mathematik in Antike und Orient.Wiesbaden. matrix Verlag 2005. S. 121.
54 B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Basel, Stuttgart. Birkhäuser Verlag 1956. S. 365.
55 Vgl. hierzu: Pythagoras & Co. - Griechische Mathematik vor Euklid Abschnitt: Euklid und die gemiedenen Lösungen klassischer Probleme auf www.antike-griechische.de.

Dass Archimedes wusste, wie man die Spirale zur Winkelteilung nutzt, obwohl er dies bei der Auflistung seiner Prioritätsansprüche nicht erwähnte, ist so sicher, wie dass Edison wusste, wie man eine Glühlampe wechselt, obwohl er dazu keine Patentschrift einreichte.

Wenn also in populärwissenschaftlichen Texten erwähnt wird, dass Archimedes die Dreiteilung beliebiger Winkel mittels archimedischer Spirale beherrschte, sollte man die gelegentlich dagegen vorgebrachten Einwände des Typs *„dafür gäbe es aber in den überlieferten Briefen des Archimedes keinen Beleg“*, nicht allzu ernst nehmen. Der Beleg fehlt zwar, aber der Gedanke, dass Archimedes dies, trotz einer intensiven Beschäftigung mit der archimedischen Spirale, übersehen haben sollte, ist nicht gerade naheliegend.

Welche mathematischen Sachverhalte sind es nun, die Archimedes im *„Über Spiralen“* Brief an Dositheos zum Gegenstand seiner *Prioritätsansprüche* macht? Bereits in der Einleitung des Briefs hebt Archimedes einige Resultate hervor:

> Ich behaupte (...), daß die von der Spirale und der in die Anfangslage zurückgekehrten Geraden begrenzte Fläche der dritte Teil des Kreises ist, der den festen Punkt zum Mittelpunkt und die von dem Punkt auf der Geraden während der einen Umdrehung zurückgelegte Strecke zum Radius hat.[56]

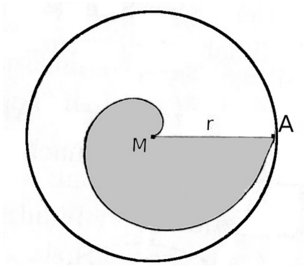

Schaubild 6: Fläche der ersten Spirale (grau) = 1/3 der Fläche des ersten Kreises

Gemeint ist damit, dass die im Schaubild 6 grau markierte Fläche (die Fläche der Spirale) 1/3 der Fläche des 1. Kreises mit dem Mittelpunkt ***M*** und Radius ***r*** (= 1. Strecke) ausmacht. Archimedes beweist dies als Satz 24 seiner Ausführungen zu Spiralen.

Ein zweites von Archimedes ausdrücklich hervorgehobenes Resultat betrifft die *Rektifikation der Kreislinie*, sprich die Konstruktion einer *geraden Linie* (einer Strecke) mit der *Länge* des *Kreisumfangs* eines gegebenen Kreises. Archimedes bearbeitet dieses Problem im Satz 18 seiner Ausführungen zu Spiralen.[57]

> Und, wenn eine Gerade die Spirale erster Umdrehung im Schnittpunkt mit der Leitlinie berührt und im festen Endpunkt des rotierenden Halbstrahls das Lot auf der Leitlinie errichtet wird, so weit, bis dieses die Tangente schneidet, so behaupte ich, daß dieses gleich ist der Peripherie des Kreises (…).[58]

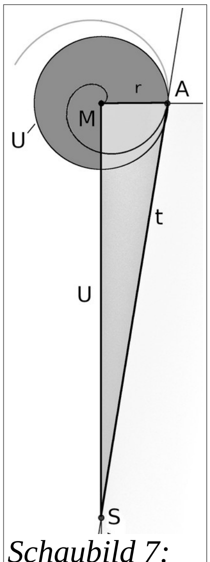

Schaubild 7: Rektifikation des Kreises mit Radius r (r = 1.Strecke)

Zur Verdeutlichung des Sachverhalts dient das Schaubild 7: Mittels einer Tangente ***t*** die die Spirale (erster Umdrehung) im Punkt *A berührt* und ein (auf der Achse) im Punkt *M* errichtetes Lot im Punkt *S schneidet*, gelingt die *Rektifikation der Kreislinie des ersten Kreises*, sprich die Länge der Strecke $\overline{MS}$ ist gleich dem Umfang ***U*** des ersten Kreises.

In der Formulierung von Aumann:

> 1.3 *Es seien t die Tangente einer archimedischen Spirale im Endpunkt A der ersten Strecke und S deren Schnittpunkt mit dem Lot zur Achse im Mittelpunkt M. Dann ist die Strecke $\overline{MS}$ so lang wie der Umfang U des ersten Kreises.*[59]

Die erste konstruktive Lösung zur Rektifikation! Da lohnt sich das Erheben von Prioritätsansprüchen. Und zwar auch dann, wenn die Konstruktion nicht mit Zirkel und Lineal auskommt (was ja auch unmöglich ist), sondern die mechanische Figur *archimedische Spirale* benötigt wird.

Durch eine bei gegebener Lineargeschwindigkeit (mit der sich der Punkt ***P*** auf der Halbgeraden bewegt), passend gewählte Winkelgeschwindigkeit

56 Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 286.

57 Mit diesem Satz 18 widerlegt Archimedes endgültig ein Diktum des Aristoteles. Der hatte behauptet, dass krumme und gerade Linien hinsichtlich ihrer Länge nicht vergleichbar seien (Physik, Buch 7, Kap. 4, 248b). Bereits der erste Satz aus der Kreismessung (hier Satz 1.1) hatte das in Frage gestellt. Und nun gibt es sogar eine Konstruktion!

58 Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. S. 7.

59 Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 134.

(mit der sich die Halbgerade um ***M*** dreht), kann mittels dieser Methode, zu jedem beliebigen Kreis eine gerade Linie mit der Länge des Kreisumfangs konstruiert werden.

Auf dieser Grundlage lässt sich dann auch zu jedem Kreis ein ***umfangsgleiches*** *Quadrat* konstruieren. Man muss ja nur die rektifizierte Kreislinie vierteln, um dann ein Quadrat über der Basis u/4 zu errichten. Aufgaben, von denen man in der griechischen Antike schon lange wusste, wie man sie konstruktiv *allein mit Zirkel und Lineal* lösen kann. Diese kleine Folgerung ist Archimedes keine Erwähnung in seinem Brief an Dositheos wert. Vielleicht wollte er auch vermeiden, dass sich seine Leser von ihm womöglich beleidigt fühlten, weil er auf solche Banalitäten extra hinwies, statt zu unterstellen, dass jedem aus seiner ausgesuchten Leserschaft dies sofort (und ohne dass es dazu seiner Hilfestellung bedurfte) klar war.

Archimedes beweist den Satz 1.3 (Satz 18 aus *Über Spiralen*) durch ***doppelte reductio ad absurdum***:

(i) Die Annahme dass $\overline{MS}$ größer ist als ***U*** führt zu einem Widerspruch;

(ii) Die Annahme dass $\overline{MS}$ kleiner ist als ***U*** führt auch zu einem Widerspruch.

Folglich muss $\overline{MS}$ genau die Länge von ***U*** haben.

Um diese *doppelte reductio ad absurdum* erfolgreich durchführen zu können, hat Archimedes dem Satz zur Rektifikation ***nicht weniger als 17 Sätze*** vorangestellt. Teils sehr einfache Hilfssätze, teils etwas anspruchsvollere Vorbereitungen der Hauptresultate.

Leider gibt es keine Chance, den Kernpunkt des Beweisgangs in ähnlich knapper und zugänglicher Form zu rekapitulieren, wie dies bei Satz 1.1 möglich war.[60] Uns bleibt folglich als Thema hier nur noch die Frage: Was hat Archimedes zu Satz 1.3 inspiriert?

Es ist naheliegend, dass Archimedes, nachdem ihm Satz 1.1 aus der *Kreismessung* gelungen war, nach einer Möglichkeit zur ***Konstruktion*** des zum Kreis *flächengleichen Dreiecks* gesucht hat. In der griechischen Antike kam der *geometrischen* Konstruktion eine sehr besondere Bedeutung zu. Und eine Konstruktion mit einer *mechanischen Figur* war immer noch deutlich besser als gar keine Konstruktion.

Sieht man sich Schaubild 7 mit diesem Gedanken im Hinterkopf an, so wirkt es so, als ob das Dreieck aus Schaubild 1 zuerst in den Kreis hinein gerutscht und dann nach unten weggekippt wäre. Das hellgrau unterlegte Dreieck ist just das Dreieck aus Schaubild 1. Kreis wie Dreieck sind dabei nun allerdings auf besondere Weise via Spirale verbunden:

Der Kreis ist der erste Kreis der Spirale, der Radius ***r*** die 1. Strecke;

Die Strecke $\overline{AS}$ auf der Spiraltangente im Punkt ***A*** liefert die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten ***r*** und ***U***.

Mittels der Spirale hat Archimedes nicht nur die Rektifikation der Kreislinie bewältigt, sondern ihm ist dabei ***zugleich*** die Konstruktion des flächengleichen, rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten ***r*** und ***U*** aus Satz 1.1 gelungen.[61]

Vielleicht war Archimedes auf der Suche nach einer Möglichkeit zur Konstruktion des Dreiecks aus Satz 1.1 (oder es hat ihn zumindest das Problem der Rektifikation umgetrieben) als *Konon* die Aufmerksamkeit des Jahrtausend-Genies auf die Spirale lenkte.[62] Hat Archimedes bei der zunächst spielerischen Erkundung der Möglichkeiten der

60 Dem am Beweis interessierten Leser seien die Übersetzungen von Heath und Czwalina, insbesondere aber die Erschließung der einschlägigen geometrischen Zusammenhänge durch Aumann empfohlen:
Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 126ff
Thomas Heath: The Works of Archimedes. Mineola, New York. Dover Publications 2002. S. 151ff.
Der Heath Text auf deutsch: Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem) Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 283ff.
Die Czwalina Übersetzung: Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. S. 5ff.

61 Mittels jeder Art von Rektifikation wäre eine Konstruktion dieses Dreiecks allerdings sowieso möglich gewesen.

62 Die Spirale, mit ihrer Überlagerung von kreisförmiger und linearer Bewegung, könnte *Archimedes* von *Konon* sogar mit ausdrücklichem Bezug zu Rektifikationsproblemen vorgestellt worden sein: *Könnte die dort weiterhelfen?*

archimedischen Spirale eher beiläufig eine Figur ähnlich Schaubild 7 in den Sand gemalt? Spätestens wenn er die Maße der Strecken in einer solchen Figur abschätzte, dürfte ihm – insbesondere vor dem Hintergrund von Satz 1.2 – die Frage gekommen sein, ob die heute *archimedische Spirale* genannte *mechanische Figur* eine Möglichkeit zur Konstruktion von rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten ***r*** und ***U*** bietet.

Und dann kommt halt die Sache mit dem Genie. Archimedes kann sich eben nicht nur solche Fragen stellen, sondern er kann sie auch beantworten. Und das auch dann, wenn man dazu etwas Anlauf braucht.

Die hier präsentierte These lautet also: Die Inspiration zu Satz 1.3 entsprang gleichermaßen der Suche nach einer Möglichkeit zur Konstruktion des Dreiecks aus Satz 1.1 (bzw. der Suche nach einer Möglichkeit zur Rektifikation der Kreislinie) wie der Erkundung der Verwendungsmöglichkeiten der von *Konon* ins Spiel gebrachten Spirale.

Letztlich ist das aber alles nicht mehr als eine Spekulation. Eine Spekulation, bei der stillschweigend unterstellt wird, dass zumindest der mathematische Gehalt der *Kreismessung* von Archimedes *vor* der Abfassung von *Über Spiralen* entwickelt wurde. Das ist keineswegs gesichert, steht aber auch nicht im Widerspruch zu dem, was wir über die Reihenfolge der archimedischen Schriften wissen.

> Archimedes gibt selbst teils durch seine einleitenden Briefe, teils durch die Benutzung von Ergebnissen aus früheren Arbeiten in späteren Schriften hinreichende Fingerzeige, die chronologische Ordnung etwa wie folgt anzunehmen:
> 1. Über das Gleichgewicht von Ebenen, I.
> 2. Quadratur der Parabel.
> 3. Über das Gleichgewicht von Ebenen, I, II.
> 4. Die Methode.
> 5. Über Kugel und Zylinder, I, II.
> 6. Über Spiralen.
> 7. Über Konoide und Sphäroide.
> 8. Über schwimmende Körper, I, II.
> 9. Die Kreismessung.
> 10. Die Sandrechnung.
>
> Es ist jedoch zu beachten, daß in Bezug auf die Abhandlung (8) nur feststeht, daß sie nach (7) geschrieben ist, und in **Bezug auf (9) nur, daß sie jünger als (5) und älter als (10)** ist [Hervorhebung in **fett** *nicht* im Original; NF].[63]

Die chronologische Reihenfolge der Abhandlungen könnte also mit der hier angesprochenen sachlogischen Nähe von *Kreismessung* und *Über Spiralen* gut harmonieren.[64]

Es bleibt noch nachzutragen, dass mit der Möglichkeit zur ***Konstruktion*** des flächengleichen ***Dreiecks*** natürlich auch die Möglichkeit zur ***Konstruktion*** des flächengleichen ***Quadrats*** gegeben ist. Das Dreieck kann in ein flächengleiches Rechteck und dieses in ein flächengleiches Quadrat verwandelt werden.[65] Die damit ermöglichte *Quadratur des Kreises* kann jedoch keinen Prioritätsanspruch begründen, da ein Verfahren zur *Quadratur des Kreises* (mittels *Quadratrix)* bereits früher von *Deinostratos* gefunden worden war.[66]

Es wird in der mathematikhistorischen Sekundärliteratur zu Archimedes gern darauf hingewiesen, dass sich Hilfssätze wie Hauptsätze aus *Über Spiralen* erstaunlich einfach und elegant verifizieren lassen, sofern man in Polarkoordinaten denkt und die Methoden der modernen Analysis benutzt.[67]

---

63 Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem) Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 20f.

64 *Hinweis*: Nach einer von *Schneider* erwähnten Mitteilung von *Wilbur Knorr* galt letzterem *Kreismessung* sogar als die älteste der Archimedes Schriften. Ivo Schneider: Archimedes. Springer Spektrum; 2. Auflage 2016. S. 24, Fn 15

65 Vgl. hierzu: Euklid und die Elemente, insbesondere den Abschnitt *Buch II – Geometrische Algebra* auf www.antike-griechische.de.

66 Vgl. hierzu: Pythagoras & Co. - Griechische Mathematik vor Euklid Abschnitt: *Euklid und die gemiedenen Lösungen klassischer Probleme* auf www.antike-griechische.de.

67 Entsprechende Vorkenntnisse und und eine gewisse Fingerfertigkeit vorausgesetzt, dauert die Verifikation von Satz 1.3 so in der Tat nur wenig länger als die Verifikation von Satz 1.1 mittels heutiger Mittelstufenmathematik.

Die dramatische Vereinfachung der Beweise bei Verwendung moderner Methoden ist es auch, die den Archimedes Übersetzer *Arthur Czwalina* motiviert, Archimedes eine Differentialbetrachtung als Hintergrund für die Konzeption des Beweisgangs beim Rektifikationssatz zu unterstellen.[68] Diese Deutung ist technisch zu anspruchsvoll, als dass sie hier vorgestellt und diskutiert werden soll. Aber unerwähnt sollte sie auch nicht bleiben.

Bevor sich dieser Text dem zweiten Hauptresultat aus *Über Spiralen* (bei Archimedes Satz 24) zuwendet, eine kurze Bemerkung: zu den Sätzen, die Archimedes zwischen den beiden hier vorgestellten Hauptresultaten beweist:

> Im Anschluss an seinen Satz 18, den Rektifikationssatz, diskutiert Archimedes in den Sätzen 19 und 20 Konstruktionen, die analog zu Schaubild 7 sind, sich aber auf Fälle jenseits des *ersten Kreises* der Spirale beziehen. Danach verschafft sich Archimedes in den Sätzen 21 bis 23 die Grundlagen für ein spezielle *geometrische Schachtelung*, welche er anschließend im Beweis zu Satz 24 verwendet.

Unter Erinnerung an Schaubild 6 reformulieren wir Satz 24 knapp als:

> 1.4 Die Fläche der ersten Spirale beträgt 1/3 der Fläche des ersten Kreises.

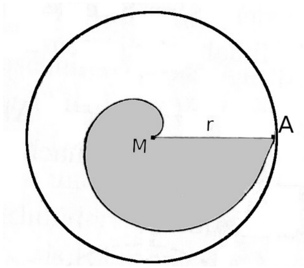

Schaubild 6 (zum Zweiten): Fläche der ersten Spirale (grau) = 1/3 der Fläche des ersten Kreises

Dass die Fläche der ersten Spirale weniger als die Hälfte des ersten Kreises und mehr als ein Viertel des ersten Kreises beträgt, lässt bereits ein erster Blick aufs Schaubild vermuten. 1/3 ist damit ein durchaus attraktiver Kandidat.

Archimedes war sich sicherlich nicht zu fein, einen solchen ersten Verdacht zum Flächenanteil mittels einfachster Methoden auf Plausibilität zu prüfen. Heutzutage würde es sich für einen solchen Plausibilitätstest anbieten, die *erste Spirale* auf Pappe aufzuzeichnen, auszuschneiden und ihr Gewicht mit einem aus gleichartiger Pappe ausgeschnittenen *erstem Kreis* zu vergleichen. Pappe stand Archimedes sicher nicht zur Verfügung, aber eine Möglichkeit zu einem ähnlichen Plausibilitätstest, wird es für Archimedes wohl gegeben haben.

Vielleicht hat Archimedes, nachdem sich der erste Verdacht durch einen Plausibilitätstest erhärtet hatte, Betrachtungen im Stile jener Überlegungen angestellt, wie wir sie für andere Sätze aus seiner Methodenlehre kennen: *Analysis Konzepte* in *mechanischer* Einfärbung als *Heuristik* bei Integrationsaufgaben. Solche, seine Vermutung stützenden, heuristischen Überlegungen haben Archimedes häufiger motiviert, bei der Suche nach einem strengen, rein geometrischen Beweis durchzuhalten bis er am Ziel war.[69]

Welchen Weg schlug Archimedes nun letztendlich ein, um den Satz streng geometrisch zu beweisen? Die denkbar knappste Antwort lautet: per *doppelter reductio ad absurdum*. Was weitere Details angeht, beschränkt sich dieses Papier auf die Vorstellung der beim Beweis benutzen *geometrischen Schachtelung:*

Wir beginnen damit, den *ersten Kreis* in acht gleiche Kreissektoren zu zerlegen. Dann werden in jeden Kreissektor je zwei zusätzliche Kreisbögen eingetragen. Das Vorgehen wird im Schaubild 8 (s. S. 23) am Beispiel für zwei Kreissektoren (mit A und B gekennzeichnet) veranschaulicht. Der erste zusätzliche in einem Kreissektor eingetragene Kreisbogen (gelb) erhält seinen Radius durch den *Schnittpunkt* der *Spirale* (grün) mit der

68 Vgl. Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. Anhang zu *Über Spiralen*. S. 61ff. *Hinweis*: Es ist sogar möglich, dass *beides*, sowohl die Deutung von *Czwalina* wie die oben im Text präsentierte Spekulation, zutreffen. Die hier im Text erörterten Punkte hinsichtlich des Aufkommens der ersten Vermutung und die *Czwalina* Deutung hinsichtlich der Zuversicht, einen Beweis zu finden, wie als Hintergrund bei der Planung des Beweiswegs. Allerdings: Obwohl *Czwalina* sehr bestimmt formuliert, stellt sich doch die Frage, ob er ausreichend berücksichtigt, dass der Autor des Beweises *Archimedes* und nicht *Newton* heißt. Bei *Newton* wären die von *Czwalina* vorgenommenen Unterstellungen deutlich plausibler.

69 Vgl. zur Frage der Heuristik auch die sehr mutigen Spekulationen von *Czwalina* in Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. S. 63ff.

ersten *Begrenzungslinie des Kreissektors*.[70] Der zweite zusätzliche Kreisbogen des Kreissektors (rot) erhält seinen Radius durch den *Schnittpunkt* der Spirale mit der *zweiten Begrenzungslinie* des Kreissektors.[71] Im Kreissektor A ist die Fläche unter dem roten Kreisbogen rötlich hervorgehoben, im Kreissektor B wurde die Fläche unter dem gelben Kreisbogen gelblich und die Differenzfläche der beiden Kreisbögenflächen grau hervorgehoben. ***Hinweis***: Die gelblich und die rötlich eingefärbte Fläche (in den Kreissektoren A und B) haben die selbe Größe.

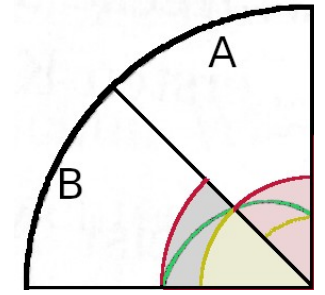

Schaubild 8: Einfügen der zusätzlichen Kreisbögen

Es gilt: Jeder Punkt unter einem der eingetragenen *inneren* Zusatz-Kreisbögen (gelb) gehört zur Fläche der Spirale. Und: Jeder Punkt, der zur Fläche der Spirale gehört, gehört auch zur Fläche unter einem einschlägigen *äußeren* Zusatz-Kreisbogen (rot).

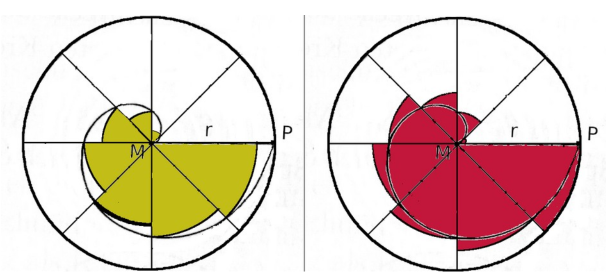

Schaubild 9: Einbeschriebene und umbeschriebene Spiralfläche

Die Fläche unter den inneren Zusatz-Kreisbögen aller acht Kreissektoren liefert also eine *untere Abschätzung*, die Fläche unter den äußeren Zusatz-Kreisbögen aller acht Kreissektoren liefert entsprechend eine *obere Abschätzung* der Fläche unter der Spirale (vgl. Schaubild 9). Die Differenz zwischen der der Spirale *umbeschriebenen* Kreisbogenkonstruktion und der der Spirale *einbeschriebenen* Kreisbogenkonstruktion beträgt: $\frac{r^2 * \pi}{8}$.

Nummeriert man nämlich die acht Kreissektoren beginnend beim Startsektor der Spirale im Umlaufsinn der Spirale von 1 bis 8 durch, dann ergibt sich, dass für $i < 8$ die im Kreissektor i *umbeschriebene* Fläche gleich der im Kreissektor i+1 *einbeschriebenen* Fläche ist (vgl. Schaubild 8). Bildet man die Differenz, so heben sich (auch wenn das bei den zeichnerisch drittklassigen Schaubildern nicht deutlich herauskommt) 7 Paare der Kreisbogenflächen jeweils auf. Es bleibt die einbeschriebene Fläche des ersten Kreissektors und die umbeschriebene Fläche des letzten Kreissektors. Die *einbeschriebene* Fläche des ersten Kreissektors beträgt 0, die *umbeschriebene* Fläche des achten Kreissektors ist der Kreissektor selbst. Dessen Fläche ist 1/8 der Fläche des *ersten Kreises* mit Radius ***r***. So ergibt sich der angegebene Wert.

Nimmt man eine *Verdoppelung* der Anzahl der Kreissektoren durch Halbierung der Kreissektoren vor und konstruiert erneut einbeschriebene und umbeschriebene Näherungen, so *halbiert* sich die Differenz zwischen *Umbeschrieben* und *Einbeschrieben*. Die Differenz beträgt wieder einen kompletten Kreissektor, der ist jetzt aber nur noch halb so groß.

Fährt man mit der *Verdoppelung* der Anzahl Kreissektoren immer weiter fort, so wird die Differenz zwischen *umbeschriebener* und *einbeschriebener* Näherung der Spiralfläche beliebig klein. Zu jedem vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n (= Anzahl von Verdoppelungen), so daß die Differenz zwischen *Umbeschrieben* und *Einbeschrieben* bei 2^n Kreissektoren kleiner ε ist. Und das gilt dann natürlich erst recht für alle Näherungen, die noch kleinere Kreissektoren verwenden.

Wenn die Differenz zwischen *Umbeschrieben* und *Einbeschrieben* beliebig klein gemacht werden kann, dann kann man auch die Spiralfläche sowohl durch *einbeschriebene*, wie

70 Im Startsektor der Spirale setzen wir den Radius dieses Kreisbogens mit Null an.

71 Beim letzten Kreissektor des *ersten Kreises* ist der Radius des einzufügenden *äußeren* Kreisbogens gleich ***r***, dem Radius des *ersten Kreises*.

auch durch *umbeschriebene* Näherungen ***beliebig*** gut nähern. Archimedes beweist dieses Resultat in den Sätzen 21 bis 23 seiner Abhandlung *Über Spiralen* rein geometrisch und mit den Methoden der Antike.[72]

Damit hat sich Archimedes eine *geometrische Schachtelung* verschafft. Es werden keine regulären Polygone wie beim Satz 1.1 verwendet, aber wieder kann die interessierende Figur durch *einbeschriebene* und *umbeschriebene* Figuren ***beliebig*** gut genähert werden. Das ist das Szenerio, das Archimedes nutzt, um wieder einmal zu einem Beweis durch *doppelte reductio ad absurdum* anzusetzen:

(i) Die Annahme dass die Fläche der Spirale kleiner ist als 1/3 des *ersten Kreises* führt zu einem Widerspruch;

(ii) Die Annahme dass die Fläche der Spirale größer ist als 1/3 des *ersten Kreises* führt ebenfalls zu einem Widerspruch.

Folglich muss die Fläche der Spirale genau 1/3 des *ersten Kreises* betragen.

Den Beweisgang zu Satz 1.4 hier detaillierter zu diskutieren, würde den Rahmen dieses Papiers definitiv sprengen.[73] An diesem Beispiel vorzuführen, wie gut sich Archimedes darauf versteht, ans Problem angepasste *geometrische Schachtelungen* zu entwerfen, war das Hauptanliegen bei der Diskussion von Satz 24.

Archimedes nutzt solche speziell angepassten *geometrischen Schachtelungen* immer wieder. Er verwendet sie dabei vor allem als Teil jener Szenarien, in denen er dann mit seinen Widerspruchsbeweisen operiert, um so die Sätze geometrisch zu beweisen.

Dieses Vorgehen, sich speziell an die Problemlage angepasste *geometrischen Schachtelungen* zu verschaffen und diese dann in seinen indirekten Beweisen bei der Herleitung der Widersprüche zu nutzen, ist sein funktionales Äquivalent zu moderner Integralrechnung. Diese stand ihm natürlich nicht zu Verfügung, sondern wurde erst weit über 1.000 Jahre später (und nicht auch zuletzt durch seine Arbeiten inspiriert) entwickelt.

Zum Abschluss noch einen Satz zu den Propositionen 25 – 28 (der Abhandlung *Über Spiralen*): Archimedes beschäftigt sich in diesen Sätzen mit Flächeninhalten von Spiralen ***jenseits*** des Spezialfalls der *ersten* Drehung bzw. mit Flächeninhalten von Figuren die mittels Spiralen definiert werden können.

Kurzes Resümee

- Die allermeisten der überlieferten Briefe des Archimedes dienen vorrangig dem Geltendmachen von Prioritätsansprüchen.
- Seine Inspirationen gewinnt Archimedes auf die unterschiedlichsten Weisen.
- Seine ***Hauptresultate*** beweist Archimedes bevorzugt indirekt, besonders gerne durch ***doppelte*** *reductio ad absurdum*: Etwas kann ***weder*** *größer* ***noch*** *kleiner* sein als im Satz behauptet, da sich sonst Widersprüche ergeben.
- Um solche Widerspruchsbeweise führen zu können, geht Archimedes häufig lange Wege und stellt dabei dem Beweis eines Hauptresultats auch schon mal *mehr* als ein Dutzend Hilfssätze und andere vorbereitende Resultate voran.
- Geht es beim Hauptresultat um eine Flächen- oder Volumenbestimmung, dann verschafft sich Archimedes meist eine geeignete *geometrische Schachtelung* als Teil jener Szenerie innerhalb derer er dann seinen Widerspruchsbeweis führt.
- Archimedes beweist meist mit großer Strenge. Stellenweise erinnern die Beweise aus den beiden hier diskutierten Abhandlungen sogar an Epsilontik. Wobei es sich bei Archimedes natürlich um eine Art *Grenzwert freier* Epsilontik handelt. Um den Schritt von Weierstraß zu gehen, *Epsilontik als Mittel zur Klärung des Grenzwertbegriffs einzusetzen*, lebte Archimedes eindeutig zu früh.

72 Um ganz genau zu sein: Archimedes beweist Sätze, aus denen sich dann dieses Resultat als leichte Schlussfolgerung ergibt. Er kaut nicht jedes Detail vor. Seine Beweisgänge erwarten vom Leser auch Eigenleistungen. Vgl. Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. S. 44.

73 Jedem, der sich damit nicht zufrieden geben will, sei die Erschließung des Beweises bei Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 142ff ***empfohlen***.

2. Kugel und Zylinder

> Er selbst [Archimedes; NF] hielt seine Beiträge zur Stereometrie für die bedeutendsten. In seiner Schrift *Über Kugel und Zylinder* bewies er, daß die Oberfläche einer Kugel viermal so groß ist wie die Fläche ihres größten Kreises. (…)
> Archimedes bewies auch, daß das Volumen einer Kugel 2/3 des Volumens des Zylinders beträgt, in den sie exakt hineinpaßt.
> Paul Strathern*

Archimedes schätzte speziell das Resultat, dass *das Volumen der Kugel 2/3 des umschreibenden Zylinders umfasst*, so sehr, dass er sich ein entsprechendes Diagramm auf seinem Grabstein wünschte.

Der römische Feldherr Marcellus, dem nach langer Belagerung die Eroberung von Syrakus gelang, hat Archimedes, der beim Fall von Syrakus umkam, diesen Wunsch erfüllt.

Cicero hat, wie er in *Gesprächen in Tusculum* (Buch 5, 64) berichtet, nach dem Grab von Archimedes gesucht und als er es fand, dort tatsächlich eine Säule mit einer Kugel in einem Zylinder vorgefunden.

Schaubild 10: Francesco Zuccarelli: Cicero entdeckt das Grabmal des Archimedes

Diese Szene, Cicero sucht und findet das Grabmal des Archimedes, hat auch Eingang in die europäische Malerei gefunden (s. Schaubild 10).

Mit der Wahl gerade dieses speziellen Motivs für sein Grabmal hat sich Archimedes deutlich in eine Reihe mit seinem bedeutendsten Vorläufer, *Eudoxos*, gestellt.

Eudoxos hatte, basierend auf *geometrischer Schachtelung* (Exhaustion) und *doppelter reductio ad absurdum,* gezeigt, dass das Volumen des *Kegels 1/3 des umschreibenden Zylinders* beträgt, Archimedes bewies, in ganz analoger Manier, dass das Volumen der Kugel 2/3 des umschreibenden Zylinders beträgt.

Wenn in mathematikhistorischen Betrachtungen diese beiden Resultate gelegentlich an Hand eines gemeinsamen Diagramms erläutert werden (s. Schaubild 11), dann darf man ein solches Diagramm auch als Anspielung auf die besondere Beziehung zwischen dem Werk dieser beiden herausragenden Mathematiker der Antike lesen. Ohne dass sie sich je begegnet sind, stehen ihre Arbeiten in einer engen Beziehung.

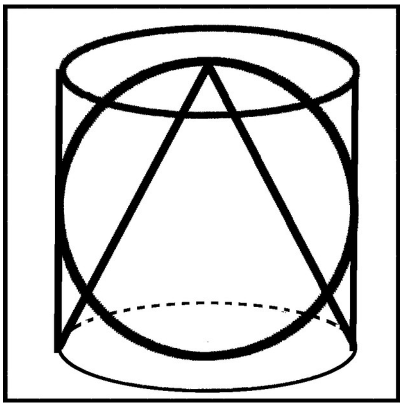

Schaubild 11: Zylinder, Kugel, Kegel

Die Volumenverhältnisse der Figuren im Schaubild 11 lauten:

$$\text{Kegel} : \text{Kugel} : \text{Zylinder} = 1 : 2 : 3$$

Gemeinhin gilt $e^{i\pi} + 1 = 0$ als die schönste Formel der Mathematik, aber so hässlich ist die obige Beziehung auch nicht.

* Paul Strathern: Archimedes & der Hebel. Frankfurt am Main: Fischer Taschenbuch Verlag 1999. S.36.

Zwei Hauptresultate

Uns liegen drei Archimedes Texte zu Kugel und Zylinder vor: *Über Kugel und Zylinder **I*** und ***II***, beides Briefe an *Dositheos,* und die *Methodenlehre*, ein Brief an *Eratosthenes*.

In *Über Kugel und Zylinder I* entwickelt Archimedes mit den klassisch geometrischen Methoden seine Hauptresultate, in *Über Kugel und Zylinder II* geht es um Anwendungsbeispiele bzw. Übungsaufgaben, ebenfalls im klassisch geometrischen Rahmen. In der Methodenlehre werden die Hauptresultate aus *Über Kugel und Zylinder I* nochmals hergeleitet, allerdings mit einem ganz anderen Ansatz. Einem Ansatz, dem Archimedes keine echte Beweiskraft zubilligt.

Dieser Abschnitt hier wird sich an *Über Kugel und Zylinder I* orientieren. Allerdings kann es nicht schaden bereits einmal eine erste Einschätzung zur *Methodenlehre* aus dem Munde von Archimedes zur Kenntnis zu nehmen. Archimedes schreibt an *Eratosthenes*:

> Da ich aber, wie ich schon sagte, in Dir einen ernsthaften Gelehrten, einen Philosophen von hervorragender Bedeutung und, bei vorkommender Gelegenheit, einen Bewunderer mathematischer Forschung sehe, so habe ich es angebracht gefunden, in demselben Buche eine eigentümliche Methode niederzulegen und Dir auseinanderzusetzen, wodurch es Dir möglich sein wird, eine Anregung zur Untersuchung einiger mathematischer Fragen mit Hilfe der Mechanik zu gewinnen. Dieses Verfahren ist nach meiner Überzeugung auch für den Beweis der Sätze selbst nicht weniger nützlich; denn gewisse Dinge sind mir zuerst durch eine mechanische Methode klar geworden, mußten aber nachher geometrisch bewiesen werden, weil ihre Behandlung nach der genannten Methode keinen wirklichen Beweis liefert. Denn es ist offenbar leichter, wenn wir durch die Methode vorher einige Kenntnis von den Fragen gewonnen haben, den Beweis zu finden, als ihn ohne vorläufige Kenntnis zu finden.[74]

Im Nachfolgenden leitet Archimedes dann (als S*atz II* der *Methodenlehre)* die beiden Hauptresultate aus *Über Kugel und Zylinder* erneut her. Er verwendet dabei aber Voraussetzungen, die er nicht in gleicher Weise für unbedenklich hält wie die Prämissen der geometrischen Beweise. Diese *mechanische Methode* steht der frühen Analysis deutlich näher als die geometrischen Beweise des Archimedes (s. Abschnitt *Methodenlehre*).

Offensichtlich nutzt Archimedes die *mechanische Methode* als Element der Heuristik. Sie kann helfen, um während der langen Suche nach einem geometrischen Beweis nicht den Glauben an die Richtigkeit des Satzes zu verlieren. Und sie kann auch als hilfreicher Hintergrund bei der Planung des Beweisgangs dienen.

Dass das Jahrtausend-Genie sich solcher Hilfsmittel bediente, erinnert daran, dass auch Archimedes nicht morgens beim Frühstück eine Vermutung hatte und dann abends mit dem ausgearbeiteten, kompletten Beweis zu Bett ging. Man macht sich wohl ein deutlich realistischeres Bild, wenn man davon ausgeht, dass nach einem ersten Verdacht[75] (und noch bevor Archimedes einen Zugang durch seine mechanische Methode suchte) erst einmal grobe Plausibilitätstests (z.B. via wiegen, messen)[76] erfolgten und erst dann nach einem Zugang mittels „*mechanischer Methode“* gesucht wurde. Im Regelfall wird der lange Weg zum Auffinden eines geometrischen Beweises wohl erst dann angetreten worden sein, wenn ausreichend Unterstützung für die Vermutung vorlag. Ein Weg, der *keineswegs* immer bereits im ersten Anlauf zum Erfolg führte. Wir wissen von Archimedes selbst, dass er Probleme, an deren Bewältigung er zunächst scheiterte, sich Jahre später noch einmal vornahm, um sie dann, in einem zweiten Anlauf, zu lösen. Kurzatmigkeit war nicht sein Ding. Und auch seinen Lesern verlangt er einen langen Atem ab.

---

74 Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 414.

75 Dabei kann auch die Inspiration durch andere Sätze eine Rolle spielen. In seiner Methodenlehre erwähnt Archimedes, dass ihn ein anderer Satz auf die Idee zum Satz über die Oberfläche der Kugel gebracht hat.

76 Jemand der als eine Art leitender Militäringenieur die Verteidigung von Syrakus organisiert hat, ist nur schwer als ein ätherisches Wesen vorstellbar. Archimedes wird um die wertvollen Einsichten, die aus der materiellen Untersuchung der Dinge entspringen, gewusst haben und dies wohl auch bei der Mathematik genutzt haben.

Da seine Abhandlungen gerne mehr als nur ein paar wenige Sätze umfassen, macht es Sinn, wenn er seinen Adressaten in der Einleitung seiner Briefe zunächst einmal mitteilt, welche Ergebnisse als die Hauptresultate seiner Ausführungen angesehen werden sollen.

Bei *Über Kugel und Zylinder I* an *Dositheos* liest sich der entsprechende Hinweis so:

> Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß wie die Fläche ihres größten Kreises. (…) Der Zylinder, der gleiche Grundfläche besitzt mit dem größten Kreise einer Kugel, dessen Höhe aber gleich dem Durchmesser der Kugel ist, ist sowohl seinem Inhalte als auch seiner Oberfläche nach 1½ mal so groß wie die Kugel. (Archimedes in der Einleitung zu *Über Kugel und Zylinder I*)[77]

Das umfasst die beiden Hauptresultate die hier Thema sind:

2.1 Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß wie die Fläche eines Kugelschnittes der durch den Mittelpunkt geht (=Großkreis).

2.2 Das Volumen einer Kugel beträgt 2/3 des Volumens des umschreibenden Zylinders.

Beide Ergebnisse lassen sich sofort mit den Formeln der Mittelstufenmathematik bestätigen:

Die Kugeloberfläche beträgt $4\pi r^2$, die Kreisfläche πr^2.

Das Volumen einer Kugel beträgt $\frac{4}{3}\pi r^3$, das Volumen des umschreibenden Zylinders ist $\pi r^2 h$ mit $h=2r$, also $\frac{6}{3}\pi r^3$.

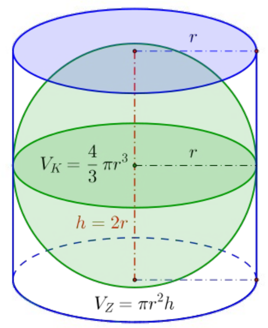

Schaubild 12: Kugel mit umschreibenden Zylinder

So gesehen ist, abseits des mnemonischen Werts von 2.1 und 2.2 fürs Formelmerken, an den beiden Sätzen an sich nichts Besonderes oder gar Aufregendes. Aufregend ist einzig und allein, dass diese Sätze vor mehr als 2.000 Jahren bewiesen wurden, als die Mathematik noch weit von unserer modernen Formelwelt entfernt war.

Archimedes beweist 2.1 als Satz 33 seiner Abhandlung, 2.2 ist ein Korollar zu Satz 34.

Satz 34 selbst lautet:

> Jede Kugel ist gleich dem Vierfachen des Kegels, dessen Grundfläche gleich dem größten Kreise und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.[78]

Daraus ergibt sich 2.2 als leichte Schlussfolgerung:

Der Kegel mit der Grundfläche eines Großkreises der Kugel und der Höhe ***r***, hat (nach Eudoxos) 1/3 des Volumens des umschreibenden Zylinders, also hat die Kugel ein Volumen von 4/3 dieses (den Kegel) umschreibenden Zylinders. Also hat die Kugel 2/3 des Volumens eines Zylinders mit gleicher Grundfläche aber doppelter Höhe. Das sind genau die Maße des die Kugel umschreibenden Zylinders (s. Schaubild 12).

Der Weg von Satz 34 zum Korollar und damit zum Hauptresultat 2.2 ist kurz, knapp, eingängig. Das trifft auf den Weg bis zum Satz 34 nicht zu. Wenn man sich den Beweisweg zu diesem Satz in seiner ganzen Komplexität ansieht, dann fängt man an zu erahnen, wie froh Archimedes gewesen sein muss, über ein mit seiner *mechanischen Methode* erzieltes Resultat zu verfügen, das ihm jeden Morgen erneut die Gewissheit gab, dass der Satz 2.2 richtig sein muss und es sich weiterhin lohnt, am rein geometrischen Beweis dieses Satzes zu arbeiten.

Hier soll der verwickelte Beweisgang nicht nachvollzogen werden.[79] Angemerkt wird aber, dass die Sätze 33 und 34 jeweils per *doppelter reductio ad absurdum* bewiesen werden und dass sich Archimedes eine *geometrische Schachtelung* der Kugel verschafft.

77 Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. S. 77.
78 Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 187.
79 Dem Interessierten sei zur Erschließung des Beweises bei *Günter Aumann: Archimedes*. Kap. 4 empfohlen.

5 Postulate

Um seine Sätze mit der angestrebten Strenge beweisen zu können, stellt Archimedes seinen Sätzen und Beweisen neben diversen Definitionen (z.B. für ein ganz spezielles *konkav*) fünf Postulate voran. Diese fünf Postulate sind spezielle Prämissen, die jenseits der allseits akzeptierten Axiome und Postulate aus Euklids Elementen, liegen. Unter der Überschrift **Postulate** beginnt Archimedes mit einem schlichten „*Ich setze voraus*“:

> **Postulat 1**: Von allen Linienstücken, die gleiche Endpunkte haben, ist die gerade Linie die kürzeste.
>
> (…)
>
> **Postulat 5:** Die größere von zwei gegebenen Größen, sei es Linie, Fläche oder Körper, überragt die kleinere um eine Differenz, die, genügend oft vervielfacht, jede der beiden Größen übertrifft.[80]

Das Postulat 1 kennt wohl jeder, der sich jemals auch nur ein wenig mit Geometrie beschäftigt hat. Das Postulat 5 ist eine Version des archimedischen Axioms. Es heißt so, obwohl es eigentlich auf *Eudoxos* zurückgeht. Die seit *Hilbert* gängige Standardformulierung des *archimedischen Axioms* (in geometrischer Deutung) lautet:

> Sind $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ irgendwelche Strecken, so gibt es eine Anzahl *n* derart, dass das *n*-malige Hintereinander-Abtragen der Strecke $\overline{CD}$ von A aus auf den durch B gehenden Halbstrahl über den Punkt B hinausführt.[81]

Die Postulate 2 bis 4 haben keine vergleichbar tiefen Spuren in der Mathematik hinterlassen. Sie spielen in moderner Axiomatik keine große Rolle. Für Archimedes aber, dem ja nicht die ausgearbeiteten Strukturen der modernen Mathematik zur Verfügung standen, waren sie von Bedeutung. Bei Interesse an einer detaillierteren Präsentation der Postulate empfehle ich (wieder einmal) *Aumann*.[82]

Rotationskörper und geometrische Schachtelung

Bei der Bewältigung von Integrationsaufgaben in der Ebene benutzte Archimedes sowohl in *Kreismessung* wie in *Über Spiralen geometrische Schachtelungen* als wichtiges Hilfsmittel seiner Widerspruchsbeweisen. Er bleibt dieser Linie auch bei Integrationsaufgaben in der Stereometrie (Raumgeometrie) treu.

Die dreidimensionalen geometrischen Schachtelungen bauen dabei auf den zweidimensionalen *geometrischen Schachtelungen* auf. Der Trick zum Übergang zu den dreidimensionalen *geometrischen Schachtelungen* ist – solange der dreidimensionale Körper als Rotationskörper aus einer *einschlägigen* zweidimensionalen Figur erzeugt werden kann – einfach:

> Nutze eine ***geschickt*** gewählte *geometrische Schachtelung* zur *einschlägigen* zweidimensionalen Figur, um aus den einzelnen Elementen der zweidimensionalen *geometrischen Schachtelung* jeweils per Rotationskörper Näherungen für den dreidimensionalen Körper zu erzeugen.

Der *Kreis* ist die *einschlägige* zweidimensionale Figur, die als zugehörigen Rotationskörper die *Kugel* besitzt: Lässt man einen Kreis um eine feststehende Achse, die durch den Mittelpunkt des Kreises geht, um 360° rotieren[83] und sucht man jenen Körper der genau alle Punkte die der Kreis bei seiner Umdrehung erfasste enthält, dann landet man bei der Kugel. Durch reguläre Polygone, die den Kreis von innen wie außen nähern, kann dem *Kreis* eine *geometrische Schachtelung* verpasst werden. Und genau zu solchen

80 Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. S. 78f.
81 David Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Stuttgart, Leipzig. Teubner 1999. S. 30.
82 Siehe: Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 84f wie S. 92ff.
83 180° hätten es in dem Fall auch getan, aber 360° schaden nicht.

regulären Polygonen kann man auch *Rotationskörper* erzeugen. Genau solche Rotationskörper werden bei Archimedes als Elemente dreidimensionaler *geometrischer Schachtelungen* für die *Kugel* genutzt.

Das ist die Grundidee. Bleibt die Sache mit dem „**geschickt**“.

Die speziellen Anforderungen sollen hier nicht aufgelistet werden. Es reicht festzustellen, dass man auf jeden Fall *hinreichend geschickt* ist, wenn man zum einen bei der Wahl der Rotationsachse wie im Schaubild 13 dargestellt verfährt, und zum anderen bei den einbeschriebenen Vielecken mit einem *regelmäßigen 12-Eck beginnt* und dann jeweils in jedem Schritt der weiteren Annäherung die *Eckzahl verdoppelt*. Analog verfährt man dann auch bei den umbeschriebenen Vielecken.

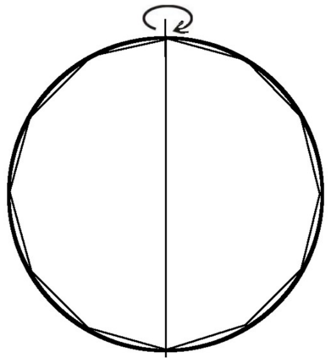

Schaubild 13: Kreis mit einbeschriebenen regelmäßigem 12-Eck – Die Rotationsachse liegt gleichzeitig auf einem Kreisdurchmesser wie auf einer maximalen Diagonale des Polygons

Der Rotationskörper eines um eine maximale Diagonale gedrehten, regelmäßigen 12-Ecks besitzt oben und unten je einen Kegel und besteht ansonsten aus Kegelstümpfen (siehe Schaubild 14). Dieses Grundmuster für die Rotationskörper der Polygone bleibt auch bei fortgesetzter Verdoppelung der Eckzahl erhalten. Nur die Anzahl der Kegelstümpfe steigt und die Kegel (oben wie unten) werden stumpfer.

Unter fortlaufender Verdopplung der Eckzahl, der zum Rotieren gebrachten (einbeschriebenen wie umbeschriebenen) Vielecke, kann die Kugel nun sowohl hinsichtlich *Fläche,* wie hinsichtlich *Volumen* von innen wie von außen beliebig genau genähert werden.

Damit verfügt man also über eine *geometrische Schachtelung* für die Kugel. Diese Behauptung bleibt hier zwar ohne Beweis, wird aber von der Anschauung gestützt.

Angesichts dieses Ansatzes zur *geometrischen Schachtelung* wird es den Leser kaum verblüffen, dass auf dem Weg zu den Hauptresultaten *Kegel* und *Kegelstümpfe* in einer Vielzahl von Sätzen behandelt werden.

Mit der *geometrischen Schachtelung* im Rücken kann Archimedes die entscheidenden Schritte zum Beweis der Hauptresultate wieder als *doppelte reductio ad absurdum* anlegen:

> Unter der Annahme, der Wert sei größer als im Satz behauptet, lässt sich (unter Ausnutzung der *geometrischen Schachtelung*) ein Widerspruch herleiten;
>
> Unter der Annahme, der Wert sei kleiner als im Satz behauptet, lässt sich (unter Ausnutzung der *geometrischen Schachtelung*) ein Widerspruch herleiten.
>
> Also ist der Wert genau wie im Satz behauptet.

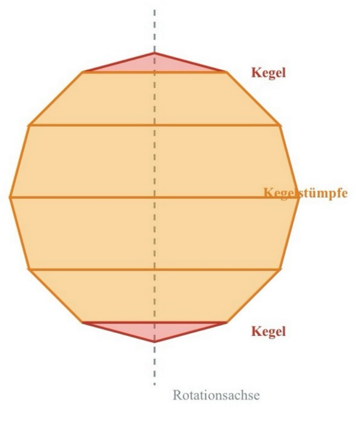

Schaubild 14: Skizze zur Gestalt des Rotationskörpers eines regelmäßigen 12-Ecks, welches um eine maximale Diagonale gedreht wurde

Bei der Anwendung dieses grundlegenden Schemas gibt es allerdings einen, sich in erschwerter Lesbarkeit niederschlagenden, Unterschied zu den Widerspruchsbeweisen des vorhergehenden Abschnitts:

Bei der Ausnutzung der Verfügbarkeit beliebig guter Näherungen wird keine der *Epsilontik* nahe kommende Beweistechnik verwendet, sondern Größenverhältnisse werden (unter

Rückgriff auf die von Eudoxos geschaffene antike *Proportionenlehre)*[84] durch Vergleich mit anderen Größenverhältnissen diskutiert. Etwas *beliebig gut nähern zu können*, wird dann ausgedrückt als: Man kann den verbleibenden Unterschied kleiner machen, als jeden Unterschied, den man durch das Größenverhältnis zweier beliebig gewählter, anderer, ungleicher Größen vorgeben kann. Solche *anderen, beliebig gewählten ungleichen Größen* ersetzen dabei das frei gewählte Epsilon. *Dijksterhuis* nennt diese Untervariante die *Verhältnisform*, wohingegen er die bei *Kreismessung* und *Über Spiralen* benutzte Untervariante als *Differenzform* bezeichnet.[85] Bei der hier gewählten Vogelperspektive fallen solche Unterschiede nicht auf. Unerwähnt sollen sie aber dennoch nicht bleiben.[86]

Anmerkung

In diesem Abschnitt wurde versucht eine erste Vorstellung davon zu vermitteln, wie Archimedes die Bestimmung von Oberfläche und Volumen bei Körpern mit gekrümmten Oberflächen bewältigt. Derartige Probleme werden heute typischer Weise per Integralrechnung erledigt. Für den hier diskutierten Fall der Kugel gehört die Kenntnis der einschlägigen Lösungen zudem zum Formelwissen des Mittelstufenstoffs.
Letzteres erleichtert zwar einerseits den allerersten Zugang, verstellt aber auch andererseits schnell den Blick für das Sensationelle, das mit diesen Arbeiten aus der Antike gelang. Diese Leistungen sind die Grundlage unseres heutigen Formelwissens zur Kugel.

> Die mannigfachen Erfolge, die Archimedes auf demjenigen Gebiete erreicht hat, das ich der Kürze halber als das Gebiet der Integrationsprobleme bezeichnen will, sind größtenteils schon längst in die elementare Mathematik übergegangen und wirken dadurch, wenn sie ohne weiteres aufgezählt werden, unvermeidlich einigermaßen trivial; es ist eben die nicht zu umgehende Schwierigkeit der Geschichte der exakten Wissenschaften, daß, was einmal ein Höhepunkt der Forschung war, im Laufe der Jahrhunderte erst zu dem Range einer scheinbar ganz normalen Leistung herabsinkt um schließlich nur noch als Übungsstoff für Anfänger fortzuleben.[87]

Kurzes Resümee

- Archimedes wünscht sich ein Diagramm zu seinem Satz zum Kugelvolumen auf seinem Grabmal und erhält es auch.
- Durch Verwendung von Rotationskörpern gelingt es *geometrische Schachtelungen* des Kreises für die *geometrische Schachtelung* der Kugel nutzbar zu machen.
- Die zentralen Beweisschritte zur Erzielung der Hauptresultate erfolgen wieder jeweils als *doppelte reductio ad absurdum*.
- Wegen des Rückgriffs auf die Proportionenlehre des Eudoxos werden einige Beweisteile für den modernen Leser vergleichsweise schwer lesbar.
- Archimedes verfügte bereits vor den geometrischen Beweisen über eine Herleitung der Hauptresultate mittels *mechanischer Methode*.
- Diese Herleitung mittels *mechanischer Methode* galt ihm jedoch nicht als vollwertiger Beweis, sondern als wertvolles Element der Heuristik.

---

84 Siehe Buch V von Euklids Elementen bzw. die kurze Einführung in die Proportionenlehre in Euklid und die Elemente auf www.antike-griechische.de.

85 Vgl.: Dijksterhuis: Archimedes und seine Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft. In: Abhandlungen zur Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftslehre. Bremen. Carl Schünemann Verlag 1952. S. 14. Der dort gegebene tabellarische Vergleich ordnet den Unterschied zwischen den beiden Unterformen *Differenzform* und *Verhältnisform* sehr schön ein. *Hinweis*: Die in der gleichen tabellarischen Übersicht gegebenen Hinweise zur (einseitigen) Approximation bei der *Quadratur der Parabel* sind zur ersten Orientierung weniger gut geeignet.

86 Wer sich diese feinen Unterschiede voll erschließen will, der benötigt Kenntnisse zur Proportionenlehre. Zusätzlich zur Erschließung bei Aumann (Kap. 4), ist dann das parallele Studium der Übersetzungen von Czwalina und Heath zu empfehlen. So reduziert man das Risiko von einem Druckfehler oder einer sich nicht erschließenden Formulierung langsam in den Wahnsinn getrieben zu werden.

87 Dijksterhuis: Archimedes und seine Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft. In: Abhandlungen zur Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftslehre. Bremen. Carl Schünemann Verlag 1952. S. 7.

3. Schwerpunkt, Hebel, Gleichgewicht

> In this treatise [On Plane Equilibriums / Über das Gleichgewicht ebener Flächen; NF] we have the fundamental principles of mechanics established by the methods of geometry in its strictest sense. There were doubtless earlier treatises on mechanics, but it may be assumed that none of them had been worked out with such geometrical rigour.
> Sir Thomas Heath[*]

Die Themen Schwerpunkt, Hebel und Gleichgewicht besitzen eine ausgeprägte innere Verbindung. Anhand der Diskussion der Physik der Balkenwaage kann man die enge Verzahnung dieser Themen jederzeit leicht deutlich machen. Archimedes hat, soweit wir wissen, zwei Abhandlungen zu diesem Themenkomplex verfasst: *Über Hebel* und *Über das Gleichgewicht ebener Flächen I, II.*[88] Die Abhandlung *Über Hebel*[89] ist verloren gegangen. Das verursacht für den *Zugang* zur erhalten gebliebenen Abhandlung, wie für deren *Beurteilung,* eine Reihe von nicht ganz unerheblichen Problemen. Bevor diese, deutlich mit den Hauptresultaten verbundenen, Probleme besprochen werden, erfolgt zunächst einmal die Präsentation der Hauptresultate.

Zwei Hauptresultate

Dem Text *Über das Gleichgewicht ebener Flächen* fehlt der sonst übliche Vorspann. Kein Gruß an den Adressaten, keine Einordnung des Textes in den Zusammenhang der vorherigen Korrespondenz und auch kein Benennen der Hauptresultate der Abhandlung. Ein Herausfiltern der zwei prominentesten Hauptresultate stellt trotzdem kein großes Problem da:

> 3.1 Größen (Gewichte) halten sich im Gleichgewicht, wenn das Verhältnis der Gewichte (Größen) reziprok zum Verhältnis ihrer Abstände zum Drehpunkt ist.[90]

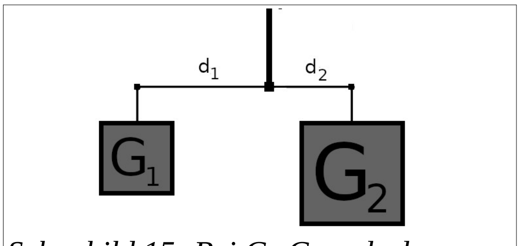

Schaubild 15: Bei $G_1:G_2 = d_2:d_1$ halten sich die Größen (Gewichte) im Gleichgewicht.

Archimedes spricht manchmal von *Größen* wo man automatisch an *Gewichte* denkt. Das Resultat 3.1 beweist Archimedes als Satz ***6*** und ***7*** seiner Abhandlung. Dass er zwei Sätze benötigt, resultiert daraus, dass er zwischen dem Fall zueinander *kommensurabler* und dem Fall zueinander *inkommensurabler* Größen unterscheidet.[91] Das Verhältnis 7 : 17 ist *kommensurabel*, das Verhältnis von 1 : π ist *inkommensurabel*. Beim letztgenannten Verhältnis kann das Verhältnis nicht durch zwei natürliche Zahlen ausgedrückt werden. Man sprach dann in der Antike davon, dass solche Größen *kein gemeinsames Maß* besitzen. Um Komplikationen, die durch das Fehlen eines *gemeinsamen Maßes* entstehen können, Rechnung zu tragen, entscheidet sich Archimedes dafür, die Fälle *kommensurabel* und *inkommensurabel* getrennt zu behandeln.

Dass Archimedes hier zumindest manchmal von *Größen* statt von *Gewichten* spricht, passt nicht nur zur Vorsicht bei inkommensurablen Größen, sondern entspringt vielleicht

* Thomas Heath: A History of Greek Mathematics, Vol. II. New York. Dover Publications 1981. S.75.

88 Der Text *Über das Gleichgewicht ebener Flächen* umfasst zwei Bücher. Hier geht es ausschließlich um die Inhalte aus Buch I. Buch II ist der Bestimmung des Schwerpunkts der Parabel gewidmet.

89 Manchmal wird der Titel dieses verlorenen Textes mit *Über Waagen* angegeben. Jedenfalls war Pappos der letzte, von dem wir wissen, dass er Zugang zu dieser Abhandlung besaß. *Hinweis*: Verschiedene moderne Autoren vermuten, dass Archimedes noch mehr verloren gegangene Abhandlungen zu dieser Thematik verfasst hat.

90 Das Hebelgesetz war, wenn vielleicht auch nicht in dieser mathematisch präzisen Form, bereits länger bekannt. Vgl. K. Simonyi: Kulturgeschichte der Physik. Frankfurt. Verlag Harri Deutsch 2001. S. 90. Neu ist hingegen der Versuch das Hebelgesetz zu *beweisen*.

91 Die Heath Übersetzung fasst die Sätze 6 und 7 zusammen, was man nicht unbedingt gelungen finden muss.

auch dem Ziel sich Spielraum zu verschaffen. Spielraum, um das Resultat möglichst allgemein interpretieren zu können. (Archimedes wird ebene Figuren, Objekte denen man nicht ohne weiteres ein Gewicht zuordnen kann, mittels dieses Satzes vergleichen.)[92]

Der von Archimedes mit Satz 3.1 gelieferte, gemeinhin *Hebelgesetz* genannte, *Zugang zu Waagen mit Hebelarmen* ist zwar einerseits klar und prägnant, aber andererseits ein Zugang, der mit allerlei *Idealisierungen* verbunden ist. Idealisierungen, die auf reale Waagen so nicht zutreffen. Die Waage, die hinter Satz 3.1 steckt, ist genaugenommen gar keine Balkenwaage, sondern eine Linie. Eine Linie, die selbst kein Gewicht besitzt und die sich unter dem Einfluss von noch so großen *Größen* kein bisschen durchbiegt. So etwas kann nicht bei *Amazon* bestellen.

Vereinfachende Idealisierungen vorzunehmen, um in den Naturwissenschaften voran zu kommen, ist keineswegs schändlich, sondern, wie sich im Verlauf der Wissenschaftsgeschichte gezeigt hat, geradezu genial. Und beim Neuaufbruch der Naturwissenschaften in Renaissance und Neuzeit hat man sich gerade in diesem Punkt von Archimedes inspirieren lassen. *Euklids Elemente* haben das Leitbild der axiomatischen Wissenschaft und des strengen Beweises vermittelt. Die Arbeiten von *Archimedes* haben es deutlich befördert, dass dieses Leitbild auch für die Naturphilosophie bzw. Naturwissenschaft beständig an Bedeutung gewann. So entstand langsam die moderne Physik als eine Disziplin, die neben experimentellen Untersuchungen auch Idealisierungen und strenge Beweise nutzt.

Kommen wir nun zum zweiten Hauptresultat:

> 3.2 Der Schwerpunkt ***S*** eines Dreiecks liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

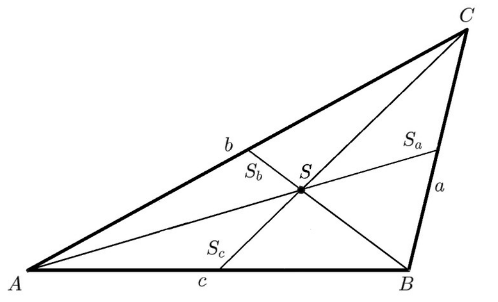

*Schaubild 16: Der Schwerpunkt (**S**) im Dreieck*

Dieser Satz, Satz 14 bei Archimedes, gehört zum klassischen Repertoire des Mittelstufenstoffs. Und wer noch nicht alles aus seiner Schulzeit vergessen hat, der erinnert sich vielleicht an die Ausführungen seines Geometrielehrers, zur Befestigung eines (Papp-)Dreiecks mit einem Bindfaden genau am Schwerpunkt. Dass nämlich dieses Dreieck im *Gleichgewicht* ist und eine einmal eingenommene Lage parallel zum Boden nicht mehr verlässt. Und zwar einfach deswegen, weil es keinen Grund gibt, um speziell eine Ecke oder speziell eine Seite stärker nach unten oder oben auszurichten. Dass der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden beim (Papp-)Dreieck jener Punkt ist, der eine Option für eine Gleichgewichtslage beinhaltet, ist nicht ganz so selbstverständlich, wie dies beim *Mittelpunkt des* (Papp-)Kreises ist. Die meisten werden den einschlägigen Punkt eines (Papp-)Rechtecks spontan (und zutreffender Weise) im Schnittpunkt der Diagonalen vermuten. Das ist, wie Archimedes im Satz 10 von *Über das Gleichgewicht ebener Flächen I* thematisiert, auch beim Parallelogramm der Fall.

Wer einen Geometrielehrer hatte, der sich unkluger Weise darauf einließ, die Sache mit Dreieck, Schwerpunkt und Bindfaden praktisch vorzuführen, der wird sich mit einiger Wahrscheinlichkeit auch daran erinnern können, dass dies erst nach etlichen Versuchen oder nur mittels Tricks oder gar überhaupt nicht funktioniert hat.

Die Objekte der Geometrie sind ideale Objekte, ihre Linien haben keine Breite und die Dreiecke haben keine Dicke. Objekte, die diesen Anforderungen entsprechen, sind in der realen Welt schwer zu bekommen. Was vergleichsweise leicht zu bekommen ist, ist

92 Die Abhandlung *Über das Gleichgewicht ebener Flächen* kann man als eins von zwei Bindegliedern zwischen der Welt des *strikt geometrischen Beweisens* und der Welt der *mechanischen Methode* deuten. Das zweite Bindeglied ist der *erste* Beweis zur *Quadratur der Parabel*. Das hier mal von *Größen*, mal von *Gewichten* gesprochen wird, könnte übrigens auch dadurch entstanden sein, dass Kopisten manchmal „*Größen*“ durch „*Gewichte*“ ersetzten.

Pappe. Ein Dreieck aus Pappe ist aber kein ideales Objekt. Es kann sich durchbiegen, saugt Feuchtigkeit auf und besitzt allerlei Inhomogenitäten. Dinge, die einem idealen Dreieck allesamt wesensfremd sind. Das Pappdreieck besitzt aber, im Gegensatz zu seinem idealen Gegenstück aus der Welt der Geometrie, zweifelsfrei ein Gewicht. Es erlebt die Schwerkraft, was man von den idealen Dreiecken der Geometrie so nicht unbedingt behaupten möchte. Beim idealen Dreieck treffen sich dafür die drei Seitenhalbierenden exakt in einem Punkt.

Wenn man eine Chance sucht, ein höchst akkurat ausgeschnittenes, nicht zu großes wie auch nicht zu kleines Pappdreieck, mit wenig Trickserei, annähernd parallel zum Boden aufzuhängen, dann ist es ein guter Tipp, es mit einem Bindfaden und dem Schnittpunkt penibel eingezeichneter Seitenhalbierender zu versuchen. Damit landet man (hoffentlich) in der Nähe des Schwerpunkts des *flachen*, *dreieckigen Papp-Prismas*. Wenn man dies dann parallel zum Boden ausgerichtet hat, bleibt es vielleicht so. Soweit ist alles klar!

Inwiefern macht es darüber hinausgehend Sinn, bei einem Dreieck darauf zu bestehen, dass es einen Schwerpunkt besitzt? Wie ist die Redeweise „der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden liefert im Dreieck den Schwerpunkt“ zu verstehen? Und, wie genau lautet eigentlich die *Definition* von *Schwerpunkt* bei Archimedes?
In *Über das Gleichgewicht ebener Flächen* wird ***keine*** *Definition* von Schwerpunkt gegeben. Hätte man sich anders gewünscht. Sind mache der Jubelorgien, die dieser Satz bei einigen Archimedes-Spezialisten auslöst, vielleicht doch etwas übertrieben?

Nur ein Beispiel für die Begeisterung, die der Archimedes *Satz zum Schwerpunkt des Dreiecks* (samt seines Beweises) bei einigen auslösen kann:

> Die Ergebnisse reiner Gedankenarbeit, die zunächst überhaupt nichts miteinander oder mit der physikalischen Welt zu tun zu haben scheinen, werden zusammengebracht, und bevor Sie es bemerken, knebelt diese reine Spekulation das physikalische Universum und zwingt es, sich auf eine bestimmte Art zu verhalten. Ich betone es nochmals: Kein Experiment war für diese Schlussfolgerung notwendig. Der Geist herrscht über die Materie, denn letztendlich muss sich auch die geistlose Materie der Logik beugen.[93]

Die Autoren des Werks, dem dieses Zitat entstammt, haben akademische Positionen an angesehenen wissenschaftlichen Institutionen der USA inne.[94]
Auch wenn im obigen Zitat untergeht, wie idealisierend der archimedische Zugang zum Thema *Gleichgewicht* und *Schwerpunkt* ist, so ist das gravierendere Problem bei dieser Art des Abfeierns, das untergeht, wie ***gehaltvoll*** Annahmen über *Symmetrien* und *Gleichgewichtsbedingungen* sind und dass diese (aus guten Gründen) mit sehr wenigen, hier *nicht* einschlägigen Ausnahmen, *nicht* zur Logik gehören. Man möchte den Autoren, falls die Formulierungen kein reiner Joke sind, zu etwas mehr Noether Lektüre raten.[95]

Trotz der im obigen Zitat herrschenden rauschartigen Begeisterung: Es gibt Probleme mit den zwei hier benannten Hauptresultaten. Und es wird Zeit, sich diese etwas genauer anzusehen. Bevor dies aber geschieht, soll festgehalten werden, dass diese Archimedes Abhandlung trotz alldem einen deutlichen und überaus segensreichen Einfluss auf die Anfänge der modernen Naturwissenschaften hatte.

Idealisierung; Zentralisierung der Annahmen in Axiomen und Postulaten; strenge Ableitung von Sätzen: das ist das Leitbild, mit dem Archimedes nicht nur Mathematik sondern auch Physik betreibt. Und wenn seine Abhandlungen selbst, hie und da, diesem

93 Reviel Netz & William Noel: Der Kodex des Archimedes. München. dtv 2010. S. 149. *Anmerkung*: Der Unsinn des obigen Zitats wird nicht dadurch gemildert, dass nur wenige Abschnitte später die „*Materie über Geist Magie*“ zum Thema wird (a.a.O. S. 150ff).

94 Gut, viele werden jetzt einfach sagen: *Ich wusste schon immer, dass die auf der anderen Seite des Atlantiks das bessere Dope haben,* aber ich finde es doch verwunderlich, dass man solche etwas verrückt wirkenden Äußerungen von Archimedes-Spezialisten zu lesen bekommt.

95 Falls die Arbeiten von Noether in Stanford oder Baltimore nicht verfügbar sind: Selbst der Klassiker von *E. Mach*: Die Mechanik in ihrer Entwicklung (speziell das Kap. *Entwicklung der Prinzipien der Statik*) kann klüger machen.

Ideal nicht ganz genügen, dann berührt dies ***nicht*** die Frage der ideengeschichtlichen Bedeutung seiner Arbeiten für die moderne Physik.

> Inzwischen hatte dieses Wort Mechanik bei Archimedes schon eine Bedeutungswandlung erfahren, die sich als historisch äußerst wichtig ausweisen sollte. Archimedes idealisiert nämlich den Hebel zu einer mathematischen Linie, an der ebenfalls idealisierte Gewichte hängen, beweist das Hebelgesetz [gemeint ist Satz 3.1; NF] auf axiomatischer Grundlage und benutzt das so gewonnene unstoffliche Werkzeug zur Ableitung mathematischer Sätze.[96]

Just beim Beweis des Hebelgesetzes gibt es jedoch Probleme. Um diese besser einordnen zu können, sollen die von Archimedes den Beweisen vorangestellten 7 Postulate vorgestellt werden.

7 Postulate

Archimedes benennt folgende, in den nachfolgenden Beweisen vorausgesetzte Postulate:

> 1. Gleiche Gewichte in gleichen Abständen sind im Gleichgewicht und gleiche Gewichte in ungleichen Abständen sind nicht im Gleichgewicht, sondern neigen sich nach dem Gewichte hin, das den größeren Abstand hat.
> 2. Wenn Gewichte in gewissen Abständen sich im Gleichgewicht halten und es wird zu einem der Gewichte etwas hinzugefügt, so sind sie nicht mehr im Gleichgewicht, sondern neigen sich nach dem Gewichte hin, das man vergrößert hat.
> 3. Nimmt man ähnlich von einem der Gewichte etwas fort so bleiben sie nicht im Gleichgewicht, sondern neigen sich nach dem Gewichte hin, von dem nichts fortgenommen ist.
> 4. Wenn gleiche und ähnliche [d. h. kongruente] ebene Figuren aufeinandergelegt sich decken, so fallen auch ihre Schwerpunkte aufeinander.
> 5. In ungleichen aber ähnlichen Figuren sind die Schwerpunkte ähnlich gelegen. Ähnlich gelegen mit Bezug auf ähnliche Figuren nenne ich Punkte von der Art, daß die von ihnen nach den gleichen Winkeln gezogenen Geraden mit den entsprechenden Seiten gleiche Winkel bilden.
> 6. Sind Größen in gewissen Abständen im Gleichgewicht, so sind (andere) ihnen gleiche Größen in denselben Abständen auch im Gleichgewicht.
> 7. Ist der Umfang einer Figur konkav in (einer und) derselben Richtung, so muß der Schwerpunkt im Inneren der Figur liegen.[97]

Drei Dinge sollen zu diesen Postulaten angemerkt werden:

(i) Ohne Vorklärung wird der Begriff *Schwerpunkt* (der damals nicht gerade zum alltäglichen Wortschatz gehört haben dürfte) auf *ebene Figuren* angewandt.

(ii) Die Postulate erwähnen *Gewichte*, *Figuren* und *Größen*. In welchen Beziehung stehen diese untereinander? Sind Gewichte ein Unterfall von Größen? *Haben* Figuren eine quantitativ bestimmte Größe (Fläche?) oder *sind* Größen eine Obermenge zu Figuren? Werden die Begriffe gar äquivok verwendet?

(iii) Es erscheint auf den ersten Blick kaum möglich, allein aus diesen Prämissen heraus das Hebelgesetz (Satz 6 und 7 bei Archimedes; hier Satz 3.1) herzuleiten.[98]

Wie versichert werden kann, bessert sich die Situation bezüglich der Herleitbarkeit des Hebelgesetzes nicht durchschlagend, wenn man die dem Hebelgesetz vorangestellten fünf Sätze zu den Prämissen hinzunimmt.[99]

Ernst Mach hat wohl als erster darauf hingewiesen, dass es Probleme bei der Herleitung des Hebelgesetzes durch Archimedes gibt.[100] Czwalina hat verdienstvoller Weise einen entsprechenden Hinweis in seine Archimedes Übersetzung aufgenommen.[101] *Czwalina*

96 Dijksterhuis: Die Mechanisierung des Weltbildes. In: Abhandlungen zur Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftslehre. Bremen. Carl Schünemann Verlag 1952. S. 34.
97 Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 315.
98 Allerdings sind die Folgerungen, die sich aus Postulat 5 - bei einem extrem geweiteten Begriff von *Figur* - ergeben können, schwer abzuschätzen. Und Archimedes benutzt gelegentlich solche Begriffsweitungen.
99 Dass dies überhaupt ein erwähnenswerter Punkt ist, hat damit zu tun, dass beim Beweis dieser Sätze auch auf Voraussetzungen jenseits der 7 Postulate (auf anderen Orts bewiesene Sätze) zurückgegriffen wird. Vgl. hierzu Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 317.
100 Vgl. Ernst Mach: Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Frankfurt. Minerva 1982. S. 14ff.

nennt den Beweis zu Satz 6 zu recht trugschlüssig. Unter den benannten Voraussetzungen allein funktioniert der Beweis nicht![102]

Die an modernen Formalisierungen orientierten Untersuchungen, die Gericke zu den Problemen des Beweises vorgelegt hat, lassen die Hoffnung, dass sich dieser Archimedes Beweis *ohne* Verstärkung der Prämissen sanieren lässt, schwinden.[103] Leider ist es jedoch unwahrscheinlich, dass sich ein *allseits* als *angemessen* akzeptierter formaler Zugang zu den Problemen des Hebelgesetzbeweises finden lässt. Allein deswegen werden wohl die Diskussionen zur Frage, wie die Probleme rund um diesen Beweis zu bewerten sind bzw. wie man mit ihnen umgehen soll, nicht so schnell enden. Dementsprechend wird bis heute die Frage, welche *zusätzlichen Prämissen* zur Schließung der Beweislücke geeignet sind ohne dabei mit den archimedischen Absichten zu kollidieren, kontrovers diskutiert.[104]

Wurde also das Jahrtausend-Genie hier bei einem richtig knackigen Fehler erwischt?[105]

Es ist natürlich ***möglich***, dass Archimedes, als er diese Abhandlung verfasste, einfach nicht gut drauf war und dieses Chaos in einigen weniger lichten Momenten verursacht hat. Es ist aber auch sehr gut ***möglich***, dass Archimedes sich an einer hochabstrakten Theorie versucht hat, um das Konzept *Gleichgewicht* möglichst umfassend von seiner engen Anbindung ans *Einzelgewicht* zu befreien.[106] Dass er die Präsentation dieses Konzepts auf zwei Abhandlungen verteilt hat, von denen eine (mit nun fehlenden Postulaten und begrifflichen Klärungen?) verloren ging und dann zusätzlich Kopisten bei der Überlieferung der erhaltenen Abhandlung die hoch abstrakten Überlegungen in Richtung ihnen leichter zugänglicher Gedanken verfälscht haben. Und dass sich so die heute etwas unbefriedigende Situation ergeben hat, ohne dass Archimedes nennenswert an der Produktion dieser Probleme beteiligt war. Eine dieser ***beiden*** Varianten *entschieden* zu behaupten, wäre unangemessen. Und natürlich gibt es zudem reichlich weitere, mögliche Varianten.

Ein misslungener Beweis: Was nun?

Wie soll man mit dem Problem des *misslungenen Beweises* umgehen? Eine Sanierung des Beweises – unter den gegebenen Prämissen/Postulaten – springt nicht ins Auge.
Aumann behandelt, mit Verweis auf den Trugschluss im Beweis, das Hebelgesetz (Satz 3.1) der Einfachheit halber als Postulat und nicht als Satz.[107] Wenn es nur um saubere Beweise geht, ein einwandfreies Vorgehen. Dann entfallen die Probleme, die es mit dem Beweis des Hebelgesetzes gab. Und man hat immer noch eine schön prägnante, idealisierende Formulierung der mathematisierten Physik, die einen guten Zugang zu vielen Themen verschafft. Die Schrödinger-Gleichung ist schließlich auch nicht herleitbar und das hat bisher niemand (der bei Verstand war) als diskreditierenden Makel gesehen.

---

101 vgl. Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. *Fußnote 2* S. 205f. *Hinweis*: Warum *Czwalina*, hier *einzig* auf die Verträglichkeit alternativer Hebelgesetze mit den Sätzen 1 bis 5 abhebt und *nicht* auch die Verträglichkeit mit den 7 Postulaten *einbezieht*, bleibt unklar.

102 Im Beweis zu Satz 6 wird ***unbewiesen vorausgesetzt***, dass man mehrere, unterschiedlich platzierte „Größen“ in ihrem Schwerpunkt konzentrieren kann, ohne dass dies Einfluss auf Gleichgewichtslagen hat. Dies ist eine Annahme, die Archimedes weder durch die 7 Postulate noch durch vorher bewiesene Sätze gesichert hatte.

103 Helmuth Gericke: Über das Hebelgesetz des Archimedes. Mathem.-Physikal. Semesterberichte 8, 1962. S. 215ff.

104 Lesenswert: *Walter Stein: Der Begriff des Schwerpunkts bei Archimedes* in *Oskar Becker* (Hrsg.): *Zur Geschichte der griechischen Mathematik.* Darmstadt. WBG 1965. S. 76ff. *Vorsicht*: Wenn manchmal der Eindruck erweckt wird, als sei mit diesem Aufsatz die Kritik an der Schlüssigkeit des archimedischen Beweises als unberechtigt erwiesen, dann ist das falsch. Allein auf der Grundlage der benannten Prämissen funktioniert der Beweis nicht.

105 Selbst antike Meisterwerke sind nicht vor Fehlern gefeit. Auch Euklids Elemente enthalten Scheinbeweise.

106 *Spekulation*: Archimedes könnte eine abstrakte *Gleichgewichtslehre* entworfen haben, die definierte Gewichts***verhältnisse*** auch bei Größen *ohne definierte Einzelgewichte* zulässt. Für ebene Figuren wäre dann das Gewichts***verhältnis*** jeweils gleich ihrem Flächen***verhältnis***, die Einzelgewichte blieben undefiniert (ähnliche Verhältnisse haben wir bei dy/dx in entsprechenden Differentialkalkülen). So etwas wäre eine Weiterentwicklung der von Eudoxos geschaffenen *Proportionenlehre* zu einer abstrakten *Proportionalitätslehre,* die bis auf Armeslänge ans Thema des Infinitesimalen heranführt. Dieser Gedanke ist *extrem spekulativ,* aber so sortiert sich vieles.

107 Vgl.: Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 68.

Archimedes wäre damit aber kaum glücklich gewesen. Das Hebelgesetz hat ihn nämlich zumindest auch, wenn nicht sogar vorrangig, als ***Teil*** einer ***Erweiterung*** der ***geometrischen Beweistechnik*** interessiert. Man sieht das sehr schön in seiner Abhandlung *Quadratur der Parabel* (*erster* Beweis). Hier werden Vergleiche verschiedener Figuren mittels Hebelgesetz vorgenommen. Und das immer wieder, um so, in einem sich über viele Sätze hinziehenden Beweisgang, zu zeigen, dass die Fläche eines Parabelsegments 4/3 der Fläche eines (ganz bestimmten) einbeschriebenen Dreiecks beträgt.[108]
Und natürlich wäre es Archimedes sofort klar, dass ein solcher Beweis weniger Eindruck machen würde, wenn er das Hebelgesetz als Postulat voranstellen müsste, statt es elegant herzuleiten. Es kommt eben nicht nur darauf an, was man beweist, sondern auch, woraus man beweist.[109]
Es ist schwer zu beurteilen, ob Archimedes einen (uns nicht überlieferten) echten Beweis zum Hebelgesetz besaß. Das, was uns als Beweis überliefert wurde, funktioniert, unter den überlieferten Voraussetzungen, jedenfalls nicht. Aber das kann das Ergebnis vielfältiger Verstümmelungen beim Kopieren des Textes sein. Und dann gibt es ja auch noch komplette Textverluste.
Ob Archimedes nun über einen voll befriedigenden Beweis zum Hebelgesetz verfügte oder nicht, jedenfalls glaubte er dies. Und für die Frage der ideengeschichtlichen Wirkung spielt die Frage, ob sein Beweis nur ein Scheinbeweis war, sowieso kaum eine Rolle. Und auch für diese Einführung zu Archimedes und die damit einhergehenden bescheidenen Versuche, den inneren Zusammenhängen zwischen seinen diversen Abhandlungen nachzuspüren, soll dieser Punkt fürderhin keine große Rolle mehr spielen.

Kommen wir zum Punkt, welche Optionen hinsichtlich Beweistechnik sich Archimedes durch seine Postulate wie Sätze zu *Schwerpunkt* und *Hebelgesetz* eröffnet. Was Archimedes aus *Über das Gleichgewicht ebener Flächen I* bezüglich *neuer Beweistechnik* mitnehmen konnte/wollte, lässt sich so charakterisieren:

> (i) Figuren haben einen Schwerpunkt und dessen Lage ist bei Bedarf durch einen entsprechenden Beweis zu klären;
> (ii) Wenn die Schwerpunkte von zwei oder *mehr* Figuren auf einer geraden Linie liegen, bilden diese ein *System*;
> (iii) Ein solches *System* besitzt einen zugehörigen *Schwerpunkt* und zwar einen, der auf der einschlägigen, geraden Linie liegt;
> (iv) Dieser geraden Linie kann (analog zu einer klassischen Balkenwaage) ein Stütz- oder auch Drehpunkt zugeordnet werden;
> (v) Fällt der *Schwerpunkt des Systems* mit dem Stütz- oder auch *Drehpunkt zusammen*, so herrscht *Gleichgewicht;*
> (vi) ansonsten herrscht ein *Ungleichgewicht;* eins mit einem Übergewicht auf jener Seite des Stütz- oder Drehpunkts, auf dem der *Schwerpunkt des Systems* liegt;
> (vii) Wo der Schwerpunkt eines Systems liegt (und damit: ob Gleichgewicht oder Ungleichgewicht herrscht), kann entweder durch Beweis geklärt werden oder als Annahme genutzt werden, um daraus Eigenschaften der Figuren eines solchen (im Gleichgewicht oder Ungleichgewicht befindlichen) Systems zu erschließen;
> (viii) Figuren können bei der *geometrischen* Verwendung des Hebelgesetztes (in gewisser Weise analog zum Wiegen von Gewichten mittels Balkenwaage) „***verglichen***“ werden. Man kann die Ergebnisse allerdings *nicht* einfach ablesen, man muss sie ***beweisen***.

108 Sicherheitshalber (?) schickt Archimedes im Anschluss noch einen zweiten Beweis hinterher, und zwar einen ohne Verwendung von Schwerpunkten und Hebelgesetz.

109 Archimedes weist im Anschreiben an *Dositheos* zur *Quadratur der Parabel* selbst deutlich auf diese Zusammenhänge hin: Wer in seinen Beweisen Mittel verwendet, die nicht ordentlich hergeleitet, sondern nur ad hoc eingeführt wurden, kann, so Archimedes, nicht beanspruchen, dass seine so erzielten Resultate als echte Lösung der Probleme anerkannt werden.

Diese neue Beweistechnik wurde bei der *Quadratur der Parabel,* einem klassisch geometrischen Problem, prominent eingesetzt. In *Quadratur der Parabel* wird zudem noch ergänzend eingeführt, dass man Figuren an eine zum Vergleich benutzte (Balkenwaagen-) Linie auch „anhängen“ kann und dies sogar mit ***mehr*** *als einem* Einhängepunkt pro Figur.

So wollte sich Archimedes eine weitere, möglichst breit anwendbare, leistungsfähige Methode zum *Größenvergleich* von Figuren verschaffen.

Das Ganze wirkt so, als wollte sich Archimedes nicht damit zufrieden geben, das gegeneinander Auswiegen von ausgeschnittenen Figuren mittels Balkenwaage als Inspirationsquelle für Sätze zu benutzen[110], sondern als wollte er zusätzlich, ausgehend von dieser Erfahrung, mittels entsprechender Idealisierung und unter Wahrung der Strenge der Argumentation, eine verlässliche Beweistechnik entwickeln.

Schwerpunkte von Entitäten ohne messbares Gewicht

Aber macht es bei Entitäten ohne messbares Gewicht, wie es die Figuren der Geometrie nun einmal sind, überhaupt Sinn von Schwerpunkten zu reden?

Nicht, wenn man die durch die Physik geprägte Bedeutung zu Grunde legt. Es gibt zwar moderne, *rein geometrische Definitionen* von Schwerpunkt, die jedoch bei Archimedes *allerhöchstens* in Form einer *sehr sehr dunklen Vorahnung* im Bereich Inspiration eine Rolle gespielt haben dürften (und selbst dies wäre überraschend).

Es spricht einiges dafür, dass er sich zur Charakterisierung von *Gleichgewicht* und *Schwerpunkt* für geometrische Objekte an Eudoxos und dessen *Proportionenlehre* orientiert hat. Eudoxos hat seine Begriffe *Größe* und *Größenverhältnis* durch Angabe einiger vorausgesetzter Beziehungen *implizit* charakterisiert. Eine explizite Definition ist in der Mathematik nicht zwingend erforderlich. Implizite Charakterisierungen können zur Entwicklung einer Theorie mit einschlägigen Sätzen und strengen Beweisen ausreichen. Eudoxos hat das vorgeführt. Und Archimedes kannte seinen Eudoxos. Davon kann man beruhigt ausgehen. Und Archimedes dürften noch die Originalarbeiten von Eudoxos vorgelegen haben. Er war sicherlich nicht auf die Zusammenfassung der *Proportionenlehre* in Buch V von Euklids Elementen als einzige Quelle angewiesen.

Es lässt sich vermuten, dass Archimedes bereits erste Elemente einer impliziten Charakterisierung von *Schwerpunkt* in der verschollenen Abhandlung *Über Hebel* vorgenommen hat.[111] Und es gehörte nicht gerade zu seinen festen Angewohnheiten, so etwas später bei jeder sich bietenden Gelegenheit zu wiederholen. Im Gegenteil, Archimedes geht mit solchen Wiederholungen recht sparsam um.

Die 7 Postulate aus der uns überlieferten Abhandlung können also gut als Ergänzung zu dem bereits in *Über Hebel* Mitgeteiltem gemeint gewesen sein.

Allerdings: Wenn nicht noch ein Palimpsest auftaucht, das die diesbezüglichen Fragen klärt, fehlt es einfach an Wissen dazu. Derzeit sind hierzu nur Spekulationen möglich.[112] Wobei dieses Papier in diesem Punkt ja nicht besonders scheu oder zurückhaltend ist.

Hebel und Seilzug

Auch wenn bei Archimedes andere Interessen im Vordergrund standen, er hat natürlich die praktische Nutzbarkeit des Hebelgesetzes nicht übersehen: Wenn ein kleines Gewicht bei entsprechender Hebelarmlänge ein deutlich größeres Gewicht heben kann, dann kann man auch mit langem Hebel (bei gegebener Kraft) deutlich schwerere Gewichte bewegen, als mit kurzem Hebel. *Arbeit* = $Kraft \cdot Weg$. So die moderne Sicht auf die Vorteile eines Hebels. Wenn man nur wenig Kraft einsetzen kann oder will, dann reicht es, die kleine Kraft über einen entsprechend längeren Weg wirken zu lassen, um die gleiche Arbeit zu verrichten, die man mit größer Kraft über einen kürzeren Weg zu verrichten vermag.

110 Siehe die Bemerkungen zu Plausibilitätstests beim Thema *Fläche der Spirale* auf S. 22.

111 Vgl. hierzu auch die Anmerkung in der Heath Übersetzung von *On The Equilibrium of Planes I,* Prop. 4.

112 Diese Spekulationen hier gehen noch deutlich über die Spekulationen von Walter Stein (vgl. Fn 104) hinaus.

Ohne viel darüber nachzudenken, nutzen wir die Vorteile von Hebeln beständig im Alltag.

Nach dem gleichen Grundmuster wie der Hebel funktioniert auch der Seilzug: Kleine Kraft die über lange Wege wirkt, kann das gleiche bewirken wie große Kraft, die über kurze Wege wirkt.

Hat das Jahrtausend-Genie im Vorübergehen auch noch den Seilzug erfunden? Eine gern erzählte Geschichte lässt diesen Verdacht aufkommen.

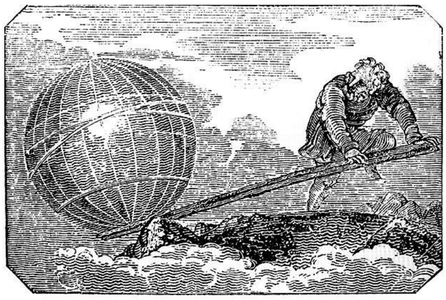

Schaubild 17: Gebt mir einen Platz wo ich stehen kann, und ich werde die Erde bewegen.

> Als das Schiff Syrakosia, ein technisches Wunder, ausgerüstet mit dem raffiniertesten Luxus, das König Hieron als Geschenk für den ägyptischen König Ptolemaios hatte bauen lassen, ins Wasser gelassen werden sollte, gelang dies nicht, bis man Archimedes herbeiholte. Dieser entwarf einen Apparat, den ein einziger Mann ganz allein bedienen konnte. Der König selbst liess das Schiff zu Wasser und rief aus: «Von diesem Tage an soll man Archimedes wenn er etwas sagt, in allem glauben.» Bei einer ähnlichen Gelegenheit soll Archimedes die geflügelten Worte gesprochen haben: «Gebt mir einen Platz wo ich stehen kann, und ich werde die Erde bewegen.»[113]

Es gibt viele gute Gründe, ein überragendes Genie wie Archimedes zu ehren, die Anordnung naiver Gläubigkeit ist jedoch kein guter Einfall.

Kurzes Resümee

- Die Abhandlung *Über das Gleichgewicht ebener Flächen* verfehlt das sonst bei Archimedes übliche Qualitätsniveau, namentlich ist der Beweis zum Hebelgesetz nur ein Scheinbeweis.
- Dieser wie andere Mängel resultieren unter Umständen aus Problemen bei der Überlieferung.
- Das offensichtliche Hauptziel von Archimedes war es, mittels des Konzepts des Schwerpunkts und durch Anwendung des Hebelgesetzes eine neue Methode zum Größenvergleich von Figuren zu schaffen, indem er eine spezielle Form des „abstrakten Wiegens“ einführte.
- Archimedes hat die praktischen Anwendungsmöglichkeiten des Hebelgesetzes nicht übersehen und vielleicht sogar den Seilzug erfunden.
- Die ideengeschichtliche Wirkung entfaltete sich insbesondere in Renaissance sowie Neuzeit und wurde durch die Schwächen des Textes kaum beeinträchtigt.[114]
- Die ideengeschichtliche Hauptwirkung der Abhandlung betrifft vor allem die Physik, insbesondere die Mechanik. Die Arbeit wurde als gutes Beispiel für mathematisierte Naturwissenschaft aufgefasst. Das Konzept des Schwerpunktes wurde genauso aufgegriffen wie die in der Abhandlung praktizierte Fokussierung auf Gleichgewichtsbedingungen oder die dort gängige Nutzung von Symmetrieüberlegungen.
- Es lässt sich *spekulieren*, dass Archimedes eine abstrakte *Gleichgewichtslehre* für Größen *ohne messbares Gewicht* entworfen hat, ein Gegenstück zur von Eudoxos geschaffenen abstrakten *Proportionenlehre* für Größen *ohne gemeinsames Maß*.
- Unabhängig davon wie weit die Ambitionen des Archimedes gingen: Er war vom Erfolg seiner Bemühungen überzeugt und hat die neue Methode des Größenvergleichs in der Abhandlung *Quadratur der Parabel* ohne Vorbehalte und mit dem Anspruch *beweiskräftig* eingesetzt. Das ist ein deutlicher Unterschied zu den Herleitungen mittels *mechanischer Methode* in seiner *Methodenlehre*, bei denen er zusätzlich von ihm selbst für problematisch erachtete Schlussweisen benutzt.

---

113 van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Basel, Stuttgart. Birkhäuser Verlag 1956. S. 346.

114 Im Altertum war es vor allem Heron, der die Resultate dieser Abhandlung für die antike Mechanik nutzbar machte.

4. Schwimmende Körper & Heureka

> Wenn wir ein im 20. Jahrhundert erschienenes Physiklehrbuch, so z.B. ein Oberschullehrbuch, betrachten, dessen Gegenstand nicht Physikgeschichte, sondern eine Darstellung heute noch gültiger physikalischer Erkenntnisse ist, dann stoßen wir auf ARCHIMEDES als den ersten antiken Gelehrten, der hierzu beigetragen hat. Das älteste physikalische Gesetz, das bis zum heutigen Tag in seiner ursprünglichen Form gültig ist, ist das archimedische Prinzip über den Auftrieb, den Körper in Flüssigkeiten erfahren.
> Károly Simonyi*

Wenn man mit modernen Augen auf das Werk von Archimedes schaut und dabei zwischen Beiträgen zu den *mathematisierten Naturwissenschaften* und zur *Mathematik* unterscheidet, dann sind seine Beiträge zur Hydrostatik seine innovativsten Leistungen im Bereich physikalischer Gesetze. Das Hebelgesetz war bereits vor Archimedes bekannt und auch wenn sein Konzept des Schwerpunkts vielleicht insgesamt folgen- und segensreicher war, es ist eben kein Gesetz.

Wie bereits beim Hebelgesetz begnügt sich Archimedes auch hier nicht damit erkannte Gesetze in einer idealisierten Form streng mathematisch zu formulieren. Er will die Gesetze der Hydrostatik nicht einfach nur benennen, sondern es ist sein Anspruch sie als Sätze zu beweisen. Archimedes verfolgt diesmal keine Nebenziele, wie die Etablierung einer neuen Beweistechnik. Aus moderner Sicht steht *Über schwimmende Körper* deswegen viel eindeutiger auf der Seite *mathematisierte Naturwissenschaft* als dies bei *Über das Gleichgewicht ebener Flächen* der Fall ist.

Es ist also nicht verwunderlich, wenn speziell diese Archimedes Abhandlung im Bereich *Geschichte der Naturwissenschaften* über ein besonderes Ansehen verfügt. Unter Nutzung des Konzepts des *spezifischen Gewichts*,[115] formuliert und beweist Archimedes – rund um das nach ihm benannte *archimedische Prinzip* – eine Vielzahl von Resultaten.

Die Abhandlung *Über schwimmende Körper* zerfällt in zwei Bücher. Die allgemeinen Resultate sind alle in Buch 1 versammelt. Das hier nicht näher betrachtete Buch 2 beschäftigt sich ausschließlich mit dem Verhalten und der Lage von Paraboloid-Segmenten in Flüssigkeiten. Dieses Papier bleibt seiner Gewohnheit treu und greift *nur zwei* Hauptresultate aus der Vielzahl der von Archimedes angebotenen Sätze heraus.

Zwei Hauptresultate

Archimedes bemüht sich auch in dieser Abhandlung um Strenge und Genauigkeit:

> Von der hohen Präzision zeugt die – theoretisch richtige, in der Praxis durchaus vernachlässigbare – Voraussetzung, daß jede Oberfläche einer Flüssigkeit einen Ausschnitt einer Kugeloberfläche bildet, deren Zentrum mit dem Erdzentrum zusammenfällt (…).[116]

Beginnend mit Körpern, die das gleiche spezifische Gewicht wie die Flüssigkeit haben (und deswegen beim Eintauchen in die Flüssigkeit weder aus der Flüssigkeit herausragen noch untergehen), untersucht Archimedes im Buch 1 die verschiedenen möglichen Fälle. Er argumentiert dabei so physikalisch wie in keiner anderen Abhandlung. Im Zentrum seiner Argumentation für die behaupteten Sätze steht dabei meist, dass, wenn es anders wäre (als im Satz behauptet), unnatürliche Druckunterschiede entstünden, die das Gleichgewicht des Systems stören würden und dabei zugleich das System in Richtung eines Gleichgewichts treiben würden. Wo in den verschiedenen Fällen jeweils ein stabiles Gleichgewicht liegt, ist das Hauptthema der von Archimedes im Buch 1 bewiesenen Sätze.

---

* K. Simonyi: Kulturgeschichte der Physik. Frankfurt. Verlag Harri Deutsch 2001. S. 88.

115 Auf die Frage, ob das Konzept des *spezifischen Gewichts* auf Archimedes zurückgeht, oder, ob er dieses bereits vorgefunden hat, vermag dieses Papier keine Antwort zu geben.

116 Alfred Stückelberger: Einführung in die antiken Naturwissenschaften. Darmstadt. WBG 1988. S. 99.

Der Abhandlung, der wieder einmal der Vorspann mit Gruß an den Adressaten und der Einordnung des Inhalts fehlt, werden keine Definitionen oder sonstigen Klärungen vorangestellt. Schwer zu bemessen, was im Prozess der Überlieferungen verloren ging.
Für *spezifisches Gewicht* benutzt Archimedes Umschreibungen, die er gerne aber auch mal etwas *missverständlich abkürzt*.
Ein Beispiel für Umschreibung

> „Körper. die bei gleichem Raum gleiches Gewicht mit einer Flüssigkeit haben" (aus Satz 3)

Ein Beispiel für eine *missverständlich abgekürzte* Umschreibung:

> „Ein Körper, der leichter als eine Flüssigkeit ist," (aus Satz 4)[117]

Die Abhandlung enthält im hier einschlägigen Buch 1 zwei Postulate.
Das erste wird zu Beginn den Sätzen vorangestellt:

> Es werde vorausgesetzt, daß eine Flüssigkeit die Eigenschaft habe, daß, wenn ihre Teile gleichmäßig liegen[118] und zusammenhängen, der weniger gedrückte Teil von dem stärker gedrückten fortgetrieben wird; und daß jeder ihrer Teile von der darüberliegenden Flüssigkeit in senkrechter Richtung gedrückt wird, wenn die Flüssigkeit nicht in etwas eingeschlossen und von etwas anderem zusammengedrückt wird.[119]

Das zweite Postulat steht – als Einschub – unmittelbar vor Satz 8 (Buch 1):

> Es werde vorausgesetzt, daß Körper, die in einer Flüssigkeit aufwärts getrieben werden, längs der Senkrechten [zur Oberfläche] aufwärts getrieben werden, die durch ihren Schwerpunkt geht.[120]

Beide Postulate haben einen eindeutigen physikalischen Gehalt! Zudem wird im zweiten Postulat das Konzept des Schwerpunkts auf *reale dreidimensionale* Objekte angewandt. Archimedes kennt Schwerpunkte also keineswegs nur bei zweidimensionalen, idealen Figuren aus der Geometrie. Die hier vorgenommene Verwendung von Schwerpunkt entspricht dem Sprachgebrauch der modernen Physik.
Kommen wir nun zu den zwei Hauptresultaten:

4.1 Ein Körper taucht in eine spezifisch schwerere Flüssigkeit so weit ein, daß die von ihm verdrängte Flüssigkeitsmenge so schwer ist wie der ganze Körper.

4.2 Ein Körper, der spezifisch schwerer ist als die Flüssigkeit, sinkt in dieser bis zum Grunde hinab und wird in der Flüssigkeit um so viel leichter, wie die von ihm verdrängte Flüssigkeitsmenge wiegt.

Dass diese beiden Resultate mit dieser Genauigkeit in den Formulierungen von Archimedes bereits vor über 2.000 Jahren gewonnen wurden, ist wirklich beeindruckend. Die Formulierung der Hauptresultate wurde hier wortwörtlich von der Czwalina Übersetzung übernommen.[121] Das sind Formulierungen, die kann man bis heute in einer Prüfung verwenden, ohne einen Punktabzug wegen mangelnder Genauigkeit fürchten zu müssen.
Auch wenn man es heute für gewöhnlich im Detail leicht anders formuliert, es ist der Gehalt der beiden obigen Hauptresultate, der bis heute zur Einführung in die Hydrostatik dient: das ***archimedische Prinzip***. Und das hat Archimedes als Satz 5 und Satz 7 von Buch 1 seiner Abhandlung *Über schwimmende Körper* bewiesen.
Die moderne Entwicklung des Verständnisses des Themas *Druck in Flüssigkeiten,* bis hin zum pascalschen Gesetz, erfolgte auf der Grundlage der Rezeption der archimedischen Hydrostatik durch Stevin und Huygens.[122]

---

117 Beide Übersetzungen nach Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 372f.
118 Sprich: Gleichen Abstand zum Erdmittelpunkt haben.
119 Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 371.
120 Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 377.
121 Vgl.: Archimedes: Über Spiralen. Kugel und Zylinder [u.a.]. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1996. S. 290ff.
122 Vgl. Dijksterhuis: Archimedes und seine Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft. In: Abhandlungen zur Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftslehre. Bremen. Carl Schünemann Verlag 1952. S. 28ff. Bei *Stevin* handelt es sich um den gleichen *Simon Stevin,* dessen Gedankenexperiment in der Einleitung erwähnt wurde.

Heureka

Zur Abhandlung *Über schwimmende Körper* gehört der nackt und unter *Heureka!* Rufen durch Syrakus rennende Archimedes. Simonyi hat diese Geschichte, samt den zwei sich anbietenden Versionen zum Bezug der *Heureka!* Rufe, zusammengefasst:

> Durch den bekannten römischen Architekten VITRUVIUS ist überliefert worden, daß König HIERO eine goldene Krone als Weihgabe für die Götter habe anfertigen lassen wollen. Er habe dazu einem Goldschmied den Auftrag erteilt, eine Krone aus purem Gold herzustellen und ihm die dafür notwendige Menge Gold ausgehändigt. Die fertige Krone habe den König dann hinsichtlich ihrer künstlerischen Gestaltung auch zufriedengestellt: es ihm aber – ungeachtet der Übereinstimmung der Masse der Krone mit der Masse des anvertrauten Goldes – der Verdacht aufgekommen, daß der Goldschmied einen Teil des Goldes durch Silber ersetzt habe. ARCHIMEDES sei nun gebeten worden, eine Methode zu finden, mit deren Hilfe sich feststellen läßt, ob die Krone tatsächlich aus reinem Golde oder aus einer Gold-Silber-Legierung besteht, ohne die Krone dabei zu beschädigen. ARCHIMEDES sei gerade mit diesem Problem beschäftigt gewesen, als er beim Bade in einer Wanne bemerkt habe, daß beim Untertauchen Wasser über den Wannenrand fließt. Durch diese Beobachtung sei er auf die Lösung des Problems gekommen. Er habe sich darüber so gefreut, daß er, nackt und nass wie er war, durch die Straßen von Syrakus zum König gelaufen sei, unterwegs das heute zu einem geflügelten Wort gewordene Heureka, heureka! (Ich habe es gefunden!) rufend.
> Nach VITRUVIUS ist ARCHIMEDES wie folgt vorgegangen: Er hat mittels Wägung zunächst das Gewicht der Krone bestimmt und dann eine Menge Gold und schließlich eine Menge Silber so bemessen, daß ihre Gewichte mit dem Gewicht der Krone übereinstimmen. Krone, Gold und Silber hat er dann in bis zum Rande mit Wasser gefüllte Gefäße getaucht das Volumen des überfließenden Wasser festgestellt (…) . Auf diese Weise sind die Volumina des Gold- und des Silberklumpens sowie der Krone bestimmt worden. Es ist offensichtlich, daß die von der verdrängte Wassermenge gleich der vom Goldklumpen verdrängten sein muß, wenn die Krone aus reinem Golde besteht. Bestünde die Krone aus reinem Silber, dann würde sie eine weit größere Wassermenge verdrängen als eine Krone aus reinem Golde, da das Silber ein spezifisch leichteres Metall ist als das Gold und deshalb bei gleichem Gewicht das Volumen des Silberklumpens weit größer ist als das des Goldklumpens. ARCHIMEDES hat festgestellt, daß die durch die Krone tatsächlich verdrängte Wassermenge zwischen der vom Goldklumpen und der vom Silberklumpen verdrängten gelegen hat. Damit konnte nachgewiesen werden, daß die Krone auch Silber enthielt, und der Goldschmied war des Betrugs überführt. (…)
> Nach anderen Überlieferungen hat ARCHIMEDES das Problem unter Verwendung des nach ihm benannten hydrostatischen Prinzips gelöst. Dieses Prinzip, das selbst in einem Studentenlied abgehandelt wird, finden wir als 16. Proposition in seinem Werk Über die schwimmenden Körper [Es sind die Propositionen 6 und 7, Buch 1, die hier gemeint sind; NF] in der folgenden Form: Jeder beliebige Körper, der leichter als das Wasser ist, strebt beim völligen Eintauchen mit einer Kraft nach oben, die sich aus der Differenz zwischen dem Gewicht des vom Körper verdrängten Wassers und dem Gewicht des Wassers selbst ergibt. Ist der Körper jedoch schwerer als das Wasser, dann wird er mit einer Kraft nach unten gezogen, die sich aus der Differenz des Körpergewichts zum Gewichte des von ihm verdrängten Wassers ergibt.[123]

Halten wir fest: Archimedes hätte den Goldschmied sowohl nach der von Vitruvius benannten Methode wie auch unter Nutzung von Satz 7 Buch 1 (hier Satz 4.2) überführen können.

Kurzes Resümee

- *Über Schwimmende Körper* ist von der Denk- und Argumentationsweise her die am deutlichsten der Physik zuzuordnende Archimedes Abhandlung.
- Sie formuliert die grundlegenden Zusammenhänge der Hydrostatik in einer bis heute als fehlerfrei geltenden Form.
- Sie nimmt vor allem über die Rezeption durch *Stevin* und *Huygens* Einfluss auf die moderne Physik.

123 K. Simonyi: Kulturgeschichte der Physik. Frankfurt. Verlag Harri Deutsch 2001. S. 88ff.

5. Die Quadratur der Parabel

> Die Mathematiker der Neuzeit, die Archimedes‘ Arbeiten wieder aufgreifen, lesen ihn häufig in einer geänderten [die *Strenge* vernachlässigenden; NF] und „verschwommenen“ Sicht. Cavalieri, um einen extremen Standpunkt zu markieren, äußerte, daß Strenge Sache der Philosophie und nicht der Mathematik sei. Nichtsdestoweniger galt bis zu dieser Zeit und auch darüber hinaus für die geometrisch ausgerichteten Quadraturverfahren die Archimedische *Strenge* als methodisches Vorbild.
> Rüdiger Thiele[*]

Nach der Wiederentdeckung der archimedischen Texte im lateinischen Europa in Renaissance und Neuzeit wollte man, an die Arbeiten Archimedes‘ anknüpfend, neue Resultate zu krumm begrenzten Figuren und Körpern gewinnen, fand es aber über Gebühr *anstrengend,* immer nach *strengen* Beweisen à la Archimedes suchen zu müssen. Das hat natürlich auch damit zu tun, dass die *doppelten reductio ad absurdum* Beweise meist nur auf Grund eines wirklich guten Einfalls funktionieren. Gerade im Einfallsreichtum seiner Beweise zeigt Archimedes sein außergewöhnliches mathematisches Talent.[124] Und ein solch großes Talent ist wahrlich nicht jedem gegeben. Wie kann man bei geringerem Talent und ohne sich beim Erarbeiten von Beweisen zu sehr quälen zu müssen trotzdem neue Resultate erzielen? Lösung: Man senkt die Anforderungen an die Strenge der Beweise deutlich ab. So werden von den verschiedensten neuzeitlichen Autoren mehr oder minder ad hoc neue Prinzipien oder Verfahren in die Mathematik eingeführt. Allesamt mit dem Ziel, die *Beweislast* soweit zu vereinfachen, dass man sich nicht mehr mit der Suche nach Ideen für verwickelte Beweise mit *doppelter reductio ad absurdum* aufhalten muss. Der allgemeine Gestus war, wenn man eine gute Näherung oder einen andersgearteten guten Einfall hat, so dass man sieht (bzw. meint zu sehen), worauf das alles hinausläuft, dann kann es doch nicht sein, dass das alles wertlos ist, solange man keine strenge *doppelte reductio ad absurdum* vorlegen kann. Man musste sich eben nur noch eine gute Rechtfertigung einfallen lassen, warum man sich die mühseligen Beweise à la Archimedes sparen kann. Und so wächst die Anzahl der Abhandlungen, die erklären, wie man sich von der Last der *griechischen Spitzfindigkeiten* befreien kann.

In diesem Umfeld bildete sich, von Newton wie Leibniz auf den Weg gebracht, die frühe Analysis heraus. Sicherlich ein dramatischer Fortschritt. Aber trotz des Genies von Newton und Leibniz brauchte es eine lange Entwicklung, eine, die bis ins 19. Jahrhundert hinein führt, bis man bei der Analysis in puncto Strenge des Beweisens wieder zu Archimedes aufschließen konnte. Heute sind wir tatsächlich soweit, dass man mittels der Analysis auch ohne das Genie eines Archimedes höchst anspruchsvolle Probleme im Bereich der Flächen- und Volumenbestimmung lösen kann, ohne dafür mit Defiziten bei der Strenge bezahlen zu müssen. Aber es hat eben lange gedauert und die ganze Zeit war als ***Referenzgröße*** für *strenges* Beweisen die *Quadratur der Parabel* des Archimedes bekannt und saß als ein höchst unangenehmer Stachel im Fleisch der Analysis.

Es ist wahrlich nicht verwunderlich, dass die Bestimmung der Fläche eines Parabelsegments – ohne die Methoden der modernen Integralrechnung, nur mit den Methoden

* Rüdiger Thiele: Antike; in: Hans Niels Jahnke (Hrsg): Geschichte der Analysis. Heidelberg, Berlin. Spektrum Verlag 1999. S. 35.

124 Trotz seines Talents und seiner Kreativität agierte Archimedes als ein ökonomisch arbeitender Mathematiker und war – sofern sich die Gelegenheit dazu ergab – durchaus bereit, eine Beweisidee mehrfach (zum Beweis verschiedener Sätze) zu benutzen. Sätze, die mit Hilfe der gleichen Beweisidee bewiesen wurden, fasst Archimedes gern in einer Abhandlung zusammen. Anders formuliert: Wenn Archimedes auffällt, dass eine Beweisidee, die bei einem Satz trägt, auch zur Erledigung weiterer Probleme benutzt werden kann, dann erledigt er diese gleich mit. Aber bei aller Ökonomie des Beweisens, geometrisches Beweisen bleibt deutlich anspruchsvoller und erfordert mehr gute Beweisideen als die mathematische Bearbeitung *identischer* Probleme im Rahmen der Analysis.

der antiken Geometrie – für die Mehrzahl der modernen Archimedes Leser zu den beeindruckendsten Leistungen des Genies gehört.

Bestimmung der Fläche von Parabelsegmenten: Das bedeutet in der Antike, die *Quadratur der Parabelsegmente* durchzuführen. Die Aufgabe für Archimedes lautete also, ein Verfahren zu liefern, mit dem sich zu jedem Parabelsegment ein *beweisbar flächengleiches Quadrat* konstruieren lässt. Die Möglichkeit zur Konstruktion eines flächengleichen Quadrats galt in der Antike genauso selbstverständlich als eine vollbefriedigende Antwort zur Größe einer Fläche, wie es für uns heute die Charakterisierung einer Fläche als ein Vielfaches eines Standardquadrats (z.B. 3,5 m^2) ist.

Die Parabel als Kegelschnitt

Vielleicht verbindet der eine oder andere mit dem Begriff *Parabel* die Funktionsvorschrift: $f(x)=x^2$. Der Graph dieser Funktion (in einem üblichen cartesianischen Koordinatensystem) liefert zwar eine *spezielle Parabel,* die Funktionsvorschrift $f(x)=x^2$ kann aber nicht als *allgemeine* Charakterisierung von *Parabeln* gelten.

In der modernen Geometrie definiert man *Parabel* gern mittels Brennpunkt und Leitlinie:

> [Moderne Definition; NF] Eine Parabel ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt (*Brennpunkt*) *F* der Ebene und einer festen Geraden der gleichen Ebene (*Leitlinie*) l gleichen Abstand haben: $\overline{FP} = \overline{PL}$.[125]

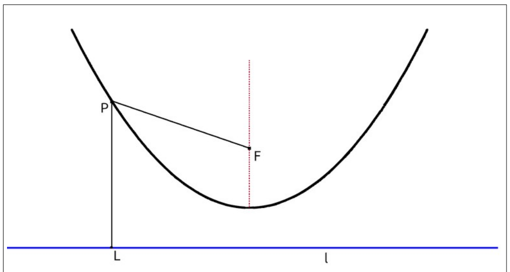

Schaubild 18: Moderne Definition der Parabel mittels Brennpunkt F und Leitlinie l (blau)

Diese moderne Definition hat viele Vorteile (und umfasst weit mehr Fälle als nur $y=x^2$), ist jedoch nicht die Definition, mit der Archimedes arbeitete.

Wenn man bei Archimedes *Parabel* liest, dann geht es um eine spezielle Art von *Kegelschnitt*.[126] Die Theorie der Kegelschnitte ist ein wichtiger Teil der antiken Geometrie, wie überhaupt die mathematische Analyse des Kegels damals ein zentrales Thema war. Die Sätze zu Kegeln, Kegelstümpfen sowie Kegelschnitten waren ein überaus potenter Bestandteil des Werkzeugkastens der antiken Geometrie. Wenn man über die Resultate aus Euklids Elementen hinauskommen wollte, war eine gewisse Fingerfertigkeit beim Umgang mit den Themen rund um *Kegel* deutlich von Vorteil. Erst die analytische Geometrie hat die Bedeutung einer intensiven Beschäftigung mit Kegeln reduziert. Noch für Galilei (1564 – 1641), Kepler (1571 – 1630) und Newton (1642 – 1726) war das Studium des antiken Lehrtextes *Konika* (Kegelschnitte) von Apollonios (ca. 265 – 190 v.Chr.) ein wichtiger Teil ihres akademischen Lektüreplans.

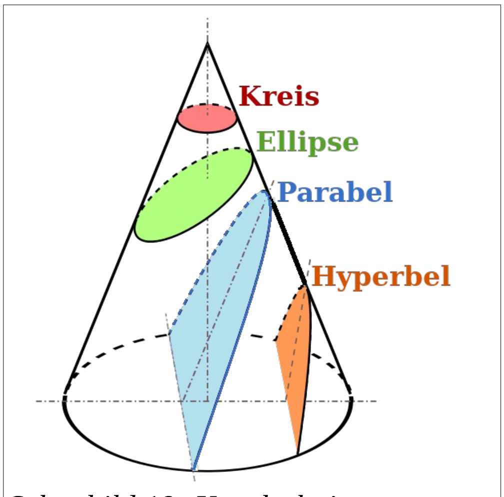

Schaubild 19: Kegelschnitte

Heute ist es zwar selten geworden, bei der Definition der Parabel auf Kegelschnitte zurückzugreifen, aber wenn man etwas sucht, findet man noch entsprechende Einträge:

125 Hans-Jochen Bartsch: Taschenbuch mathematischer Formeln. München, Wien. Carl Hanser Verlag 2001. S. 268.

126 Vgl. auch: Thomas Heath: The Works of Archimedes. Mineola, New York. Dover Publications 2002. S. clxvii f. Nach Ivo Schneider: Archimedes. Springer Spektrum; 2. Auflage 2016. S. 20, insbesondere Fn 6, fehlt beim *ursprünglichen* Archimedes Text das Wort *Parabel* im Titel und es wurde stattdessen der Ausdruck „Schnitt des rechtwinkligen Kegels“ verwendet. Die Bezeichnung *Parabel* ist, so Schneider, erst im Rahmen einer frühen Redigierung des Textes und als Anpassung an die von Apollonios eingeführte Terminologie im Titel aufgetaucht.

> [Antike Definition; NF] Schon in der Antike definierte man die Kegelschnitte als Schnitte einer Ebene *E* mit einem *geraden Kreiskegel*.[127] Die Schnittfiguren werden Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel genannt. (…) verläuft die Ebene parallel zu einer Mantellinie, so entsteht eine Parabel;[128]

Die moderne Definition liefert *unbegrenzte Linien*, die antike Definition *wohlbegrenzte Flächen*; bei der modernen Definition hängt die erhaltene Parabel von der Wahl des *Brennpunktes* und der *Leitlinie* ab, bei der antiken Definition sind der geschnittene *Kegel* und die gewählte *Ebene* entscheidend.

Trotz all dieser Unterschiede gibt es einen einfachen und direkten Zusammenhang: Bezeichnet man bei einer antiken Parabel-Figur jenen *Teil* der begrenzenden Linie, die auf dem *Kegelmantel* (und nicht auf der Grundfläche) verläuft, als *Parabellinie*, so ist diese *Parabellinie*, aus Sicht der modernen Parabeldefinition, ein *Abschnitt einer Parabel.* Sprich: Es existiert ein Brennpunkt ***F*** und eine Leitlinie ***l***, so dass alle Punkte auf einer solchen Parabellinie den gleichen Abstand zu Brennpunkt und Leitlinie haben. Die Parabellinie wurde im Schaubild 19 in einem kräftigem Blau hervorgehoben.

Nach diesen Vorbemerkungen sollte klar sein, dass die Resultate, die Archimedes unter Bezug auf das *antike Verständnis* von Parabeln gewonnen hat, leicht auf das Problem der Flächenbestimmung bei *Parabeln* im *modernen Sinne* übertragen lässt.

Zu klären sind noch die Begriffe *Parabelsegment, Grundlinie* des *Parabelsegments*, *Höhe des Parabelsegments* sowie *Scheitel* eines *Parabelsegments:*

- Ein Parabelsegment ist jene Fläche, die durch die Parabellinie und eine Sehne dieser Parabellinie begrenzt wird. Der Grenzfall, dass die Fläche des Parabelsegments identisch mit der Fläche der Parabel ist, ist zulässig.
- Die Sehne, die zur Abgrenzung eines Parabelsegment verwendet wird, heißt Grundlinie des Parabelsegments.
- Die maximale, lotrechte[129] Strecke von der *Parabellinie* des *Parabelsegments* zur *Grundlinie* des *Parabelsegments* ist die *Höhe* des Parabelsegments.
- Der eindeutig bestimmte Punkt ***S*** der *Parabellinie*, dessen Lot die Höhe des *Parabelsegments* liefert, heißt *Scheitel* des Parabelsegments.

Damit sind alle Voraussetzungen gegeben, um das Hauptresultat zur *Quadratur der Parabel* formulieren zu können.

Das Hauptresultat

> 5.1 Die Fläche eines Parabelsegments mit der Grundlinie $\overline{PQ}$ beträgt 4/3 der Fläche des einbeschriebenen Dreiecks SPQ, das über der Grundlinie hin zum Scheitel ***S*** errichtet wird. (s. Schaubild 20).[130]
>
> 5.1a [Ergänzender Hinweis:] Der Scheitel ***S*** des Parabelsegmements kann konstruktiv bestimmt werden.

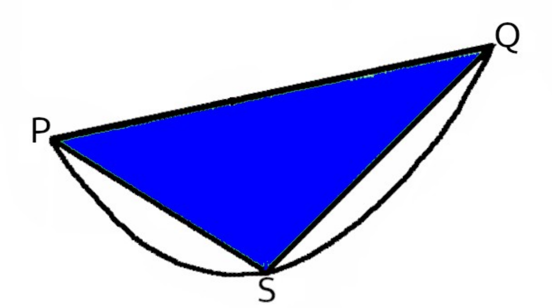

Schaubild 20: Die Fläche eines Parabelsegments beträgt 4/3 der Fläche des einbeschriebenen Dreiecks SPQ.

Ausgehend vom Dreieck SPQ lässt sich – mit Methoden, die jedem antiken Geometer geläufig waren – ein *Quadrat* mit 4/3 der Fläche dieses Dreiecks konstruieren. Die Quadraturaufgabe gilt damit als gelöst.

---

127 Mit *Kegel* ist im folgenden stets ein *gerader Kreiskegel* gemeint.

128 Siegfried Gottwald (Hrsg): Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik. Mannheim; Leipzig; Wien; Zürich. Meyers Lexikonverlag 1995. S. 317. *Kursive* Hervorhebung von „geraden Kreiskegel“ nicht im Original.

129 *lotrecht* heißt hier: parallel zur Symmetrieachse der Parabel (in den Abb. 18 / 19 als gestrichelte Linie eingetragen).

130 Archimedes formuliert das etwas anders und deutlich eleganter, aber das Risiko eines Missverständnisses ist bei der originalen Formulierung deutlich höher.

Archimedes benennt in seiner Abhandlung zur *Quadratur der Parabel* nicht nur diese Lösung des Quadraturproblems, sondern liefert ***2 (in Worten zwei)*** Beweise dafür. Archimedes beweist das Hauptresultat 5.1 zuerst als ***Satz 17*** und dann noch einmal als ***Satz 24***. Das ist etwas ungewöhnlich, denn schließlich gilt ja bereits ***ein*** Beweis als *voll ausreichend*. Und für *gewöhnlich* enthalten die Abhandlungen von Archimedes auch nur ***einen*** Beweis pro Satz.

Der *erste* Beweis knüpft an die Methoden an, die Archimedes in *Über das Gleichgewicht ebener Flächen I* entwickelt hatte und ist dementsprechend *nicht ganz ohne Probleme*.
Der zweite Beweis jedoch kann als ***Referenzgröße*** für strenges geometrisches Beweisen dienen. Hier wird bei der Flächenbestimmung von Parabelsegmenten eine *Strenge des Beweisens* praktiziert, die weit über dem Niveau der Mehrzahl der mathematischen Arbeiten aus der Neuzeit steht. Der zweite Beweis ist auch dafür berühmt, dass Archimedes hier überaus geschickt mit einer geometrischen Reihe hantiert.

Dieses Papier begnügt sich mit ein paar Anmerkungen zu den beiden Beweisen.

Anmerkungen zum ersten Beweis

Dieser erste Beweis zur Parabelquadratur ist der einzig überlieferte Fall, in dem Archimedes von der in *Über das Gleichgewicht ebener Flächen I* vorbereiteten Beweistechnik zum Flächenvergleich innerhalb eines *Beweises* Gebrauch macht. Es wird kein Versuch unternommen, einen Einblick in den Gesamtaufbau des ersten Beweises (mit seinen immerhin 17 Sätzen) zu geben. Es soll aber ein Eindruck davon vermittelt werden, wie Archimedes unter Rückgriff auf *Hebelgesetz* und *Schwerpunkt* Flächenvergleiche durchführt. Satz 6, ein einfacher Hilfssatz, bietet sich an, um einen authentischen Einblick in die durch Archimedes erschaffene vollständig neue Beweistechnik zu gewähren. *Satz 6 samt Beweis* sollen hier *komplett* vorgestellt werden.

Nur noch zwei Vorbemerkungen:

- Wohl um den anschaulichen Zugang zu erleichtern, werden die Gewichtsvergleiche in sogenannten *vertikalen Ebenen* durchgeführt;
- Wie bereits im Abschnitt 3. Schwerpunkt, Hebel, Gleichgewicht erwähnt, werden Figuren nun auch an die „Hebelarme“ angehängt und es ist dabei mehr als ein Anhängepunkt pro Figur zulässig.

Es folgt Satz 6 samt Beweis:

Satz 6:

> Es liege die vorliegende Figur (Fig. 6) in einer vertikalen Ebene, die Seite der Geraden, auf der der Punkt D liegt, sei die untere, die andere die obere. Die Seite BC stelle die Hälfte eines Wagebalkens dar, so daß AB = BC ist. Es werde das Dreieck in den Punkten B und C aufgehängt gedacht. Auf der anderen Seite des Wagebalkens hänge eine andere Fläche Z, und es herrsche in dem so beschriebenen System Gleichgewicht. Ich behaupte, daß die Fläche Z ein Drittel der Fläche BDC ist.

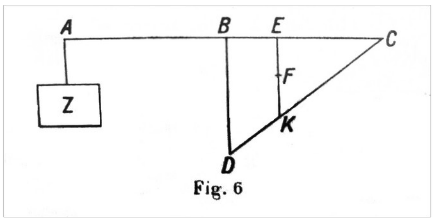

Schaubild 21: Figur 6 zu Satz 6

Beweis:

> Da nämlich unserer Voraussetzung nach Gleichgewicht herrscht, so liegt die Gerade AC horizontal, und die Lote, die auf AC in der Vertikalebene errichtet sind, sind vertikal. Es werde nun BC in E so geteilt, daß CE = 2EB ist, und es möge EK parallel DB gezogen werden. KE werde in F halbiert. F ist also der Schwerpunkt des Dreiecks DBC, denn dies wird in der Mechanik bewiesen.[131] Wenn nun die Aufhängung des Dreiecks BDC in den

131 Dies ist ein etwas verkürzter Hinweis. Archimedes, ein Meister im Umgang mit den Strahlensätzen, erwartet, dass der Leser selbsttätig erkennt, dass ein von C ausgehender Strahl, der durch F geht, die Strecke $\overline{BD}$ halbiert und dass daraus – ebenfalls nach den Strahlensätzen - folgt, dass F die damit gegebene Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 teilt und dass damit just an dieser Stelle (bei der 2:1 Teilung der Seitenhalbierenden), wie Archimedes wohl als

Punkten B und C gelöst wird und statt dessen das Dreieck in E aufgehängt wird, so wird das Dreieck in der bisherigen Lage verharren, da ja der Schwerpunkt F auf dem in E errichteten Lot liegt. Denn auch dies ist bewiesen worden. Da also soweit nun das Dreieck DBC die gleiche Lage wie vorher zum Wagebalken hat, so wird es mit Z auch weiterhin im Gleichgewicht sein. Wenn aber die in A aufgehängte Fläche Z und das in E aufgehängte Gewicht BDC im Gleichgewicht sind, so ist klar, daß diese Flächen den Abständen vom Unterstützungspunkt des Wagebalkens umgekehrt proportional sind (Abh. über den Schwerpunkt I, §§ 6 u. 7)[132] und es ist AB : BE = △ BDC : Z. Es ist also AB dreimal so groß wie BE und das Dreieck BDC ist dreimal so groß wie die Fläche Z.

Es ist aber auch klar, daß Gleichgewicht herrscht, wenn das Dreieck dreimal so groß ist wie die Fläche Z.[133]

Dieser kleine Satz ist einer der Bausteine des *ersten* Beweises zur Bestimmung der Fläche des Parabelsegments. Archimedes verlässt sich auf die Tragfähigkeit dieses Beweises. Obwohl man dem Beweis eine mechanische Einfärbung nicht absprechen kann, gibt es hier seitens Archimedes keine Vorbehalte hinsichtlich der Beweiskraft, wie er sie in der Methodenlehre hinsichtlich der Herleitungen mittels der dort vorgestellten *mechanischen Methode* ausspricht. *Nicht* alles, was eine mechanische Einfärbung hat, gilt Archimedes als bloße Heuristik![134]

Macht sich Archimedes gar keine Sorgen, dass seinem Beweisgang wegen der mechanischen Einfärbung die Anerkennung verwehrt bleiben könnte? In der Einleitung zur an *Dositheos* gerichteten Abhandlung wird in der Tat die Möglichkeit angesprochen, dass seinen Beweisen wegen der verwendeten Voraussetzungen, die volle Anerkennung verwehrt bleiben könnte. Aber dabei geht es *nicht* um befürchtete Einwände zur Verwendung von *Hebelgesetz* und *Schwerpunkt*, sondern um eine in den Beweisen benutzte Form des *Archimedischen Axioms* (eine Bezeichnung, die Archimedes dabei

---

bekannt voraussetzt, der Schnittpunkt einer Seitenhalbierenden mit den anderen Seitenhalbierenden liegt (was sich übrigens ebenfalls mittels Strahlensätzen beweisen lässt - bei Bedarf: mathepunk erklärt im Video wie). Und dieser Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist der Schwerpunkt des Dreiecks. Letzteres wurde im Satz 14 der Abhandlung *Über das Gleichgewicht ebener Flächen I* (Satz 3.2 dieses Papiers) festgestellt.

Man kann diese Stelle also so interpretieren, dass *zum einen* Archimedes sich keinen Leser vorzustellen vermag (oder will), dem diese Zusammenhänge zwischen dem Satz 14 zum Schwerpunkt von Dreiecken im allgemeinen und dem hier einschlägigen Dreieck △ BDC im besonderen, nicht sofort vor Augen stehen und *zum anderen* einfach ein Kopist den heute unüblichen Titel *Mechanik* beim Querverweis auf die einschlägige Abhandlung *Über das Gleichgewicht ebener Flächen* benutzt hat.

Ein Querverweis auf die einschlägige Abhandlung unter der Bezeichnung *Mechanik* könnte gut durch einen ***bewussten*** Redigierungseingriff eines frühen antiken Kopisten in den Text gekommen sein. Hintergrund: Der berühmte antike Ingenieur *Heron* nahm in seiner *Mechanik* Bezug auf die archimedischen Beiträge zur *Mechanik*. Das könnte durchaus die Idee aufkommen lassen, dass „Mechanik" ein informativerer Titel für die einschlägige Archimedes Abhandlung wäre. Da die Titel von Abhandlungen in der Antike keine geheiligten Größen waren, es kein ISBN System und auch keine Standards zur Titel-Aufnahme in die Nationalbibliothek gab, betrachteten sich viele Kopisten als autorisiert Abhandlungen mit neuen, alternativen Titeln zu versehen, zumindest wenn sie die neuen Titel für geeigneter oder treffender hielten.

132 Bei „*Abhandlung über den Schwerpunkt I*" handelt es sich, so die allgemeine Einschätzung, um einen alternativen Titel für *Über das Gleichgewicht ebener Flächen I*. Und dort, und zwar genau in den Sätzen 6 und 7, wird das hier einschlägige Hebelgesetz (unter Darbietung eines Scheinbeweises) eingeführt. Ein Kopist, der erkannte, dass an der einschlägigen Beweisstelle das Hebelgesetz in Anspruch genommen wird und der genau wusste, wo es steht, hat vielleicht einen neuen Querverweis eingefügt oder einen vorgefundenen, unspezifischeren Querverweis (vielleicht sogar einen Querverweis auf *Mechanik*) durch einen präziseren Querverweis ersetzt und dabei einen anderen als den heute üblichen Namen für die Abhandlung benutzt. Zusammen mit der Deutung aus der Fußnote oben kann man so die insgesamt wenig glückliche Situation, dass in *einem* Beweis auf ein und dieselbe Abhandlung unter *zwei* Bezeichnungen verwiesen wird, ganz undramatisch als Folge von Kopisteneingriffen deuten. Nicht ideal, aber bei einer über Jahrhunderte laufenden Tradierung, an der Kopisten mit unterschiedlichen Mentalitäten, kulturellen Hintergründen und Kenntnisständen teilnahmen, auch wiederum nicht so extrem, dass nicht vergleichbare Unebenheiten aus der Überlieferung anderer antiker Texte bekannt wären.

133 Archimedes: Werke. Darmstadt. WBG 1983. S.156f

134 Vgl. hierzu: Dijksterhuis: Archimedes und seine Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft. In: Abhandlungen zur Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftslehre. Bremen. Carl Schünemann Verlag 1952. S. 23.

aber *nicht* verwendet). Archimedes verweist (etwas verklausuliert) darauf, dass schon Eudoxos dieses Prinzip benutzt hat, und dass, wenn man ihm zugesteht, dass seine Beweise die gleichen Qualitätsstandards wie die Beweise des Eudoxos erfüllen, er an weiteren Diskussionen dazu nicht interessiert sei.[135] Auf mögliche Probleme bei der Anerkennung seiner Beweise wegen der Verwendung des Hebelgesetzes sowie von Schwerpunkten, kommt Archimedes *nicht* zu sprechen.

Nach diesem kurzen Schlaglicht auf den *ersten* Beweis soll das Thema *erster Beweis*, soweit es die mathematisch-sachlogischen Fragen betrifft, bereits wieder beendet werden.

Trotzdem bleibt der Satz 6 noch einen Augenblick im Focus. Der kleine Hilfssatz 6, der hier benutzt wurde, um ein Beispiel für das Beweisen mittels Hebelgesetz und Schwerpunkt zu geben, eignet sich nämlich auch gut, um auf einen Punkt zu sprechen zu kommen, der mehr mit der Erschließung der Archimedes Texte in den unterschiedlich geprägten intellektuellen Milieus als mit den Archimedes Texten selbst zu tun hat.

Um die Archimedes Texte zu erschließen sind unstrittig philologisches Detailwissen, mathematikhistorische Kenntnisse und ein gutes Verständnis der mathematischen Sachzusammenhänge erforderlich.[136] Die Gewichtung, die diese drei Komponenten in den verschiedenen intellektuellen Milieus erfahren, ist jedoch höchst unterschiedlich.

Obwohl hier bei der Betrachtung der Beweise häufig eine Vogelperspektive gewählt wird, favorisiert dieses Papier eindeutig eine starke Betonung des mathematisch-sachlogischen Zugangs. Die Bedeutung der Archimedes Abhandlungen beruht auf ihrer mathematischen Brillanz, und um diese zu erschließen, muss man bereit sein, in den Kategorien von ***Definition, Satz, Beweis*** zu denken. Die Strenge, in der Archimedes (für gewöhnlich) beweist, sorgt dabei auch ganz beiläufig dafür, dass man bei der Beschäftigung mit Archimedes-Texten jene Annahmen, die sich nicht durch strenge Beweise klären lassen (und für die es auch sonst keine harten Belege gibt), als spekulativ einstuft (und auch so ausweist). Auch spekulative Hinweise können, wenn es denn gut läuft, den Zugang zu den archimedischen Sätzen und Beweisgängen erleichtern.

Bei einer starken Betonung des mathematisch-sachlogischen Zugangs (wie hier in diesem Papier), ist der Umstand, dass im Beweis zu Satz 6 auf eine Abhandlung namens *Mechanik* verwiesen wird, keine wirklich große Sache.[137] Dass antike Abhandlungen zu verschiedenen Zeiten und/oder in unterschiedlichen Kulturkreisen unter unterschiedlichen Titeln geführt wurden, ist bekannt. Eine kurze Vertiefung in die mathematische Sachlogik

135 Vgl. hierzu: Kurt von Fritz: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft. Berlin, New York. Walter de Gruyter 1971. S. 382f.

136 Bereits beim Übergang von dem Material, das dank der Tradierung durch Kopisten verfügbar ist (bzw. war!), zu einem für den modernen Leser gut zugänglichen Text wie der Heath Übersetzung, müssen *hunderte* von klugen Entscheidungen getroffen werden, die dabei sowohl philologisches Detailwissen, mathematikhistorische Kenntnisse und ein mathematisches Verständnis der sachlogischen Zusammenhänge der von Archimedes erörterten Probleme erfordern. Und natürlich ist jede der so erzeugten Übersetzungen dabei immer auch ein Stück weit eine Interpretation, die man nicht immer in jedem Punkt teilen muss. Aber ohne diese Vorleistungen müssten wir uns mit einem nicht nur ohne Satzzeichen, sondern auch *ohne Worttrennung* geschriebenen Text im dorischen Dialekt des Altgriechischen herumschlagen. Zudem enthalten die Quellen nicht nur jede Menge kleiner Nachlässigkeiten, Fehler und Entstellungen, sondern sind passagenweise kaum bis schlichtweg überhaupt nicht lesbar. Daraus einen mathematisch sinnhaft wirkenden Text zu erzeugen wird weiterhin dadurch erschwert, dass die von Archimedes verwendete mathematische Notation in puncto Eindeutigkeit deutlich zu wünschen übrig lässt. Aus dieser Misere kommt man nur heraus, wenn man lernt die enthaltenen, häufig brillanten Skizzen zu deuten. Deswegen wurden die intensiven Archimedes Leser in Renaissance und Neuzeit – die noch nicht über den Komfort einer Heath Übersetzung verfügten – (fast) alle in Richtung eines mathematisch Denkstils geprägt, der die *klug gestaltete* Skizze als zentrales Hilfsmittel der Problemanalyse und Problemlösung schätzte.

137 Zumindest gilt in diesem Papier der Scheinbeweis beim Hebelgesetz als eine deutlich größere Sache. Dem Unterschied zwischen Beweis und Scheinbeweis eine gewisse Bedeutung beizumessen, könnte allerdings mittlerweile eine Minderheitenposition geworden sein. Irritierenderweise übergeht selbst eine mathematikhistorische Darstellungen wie *Thomas Sonar: 3000 Jahre Analysis* (Berlin, Heidelberg. Springer 2011/2016) bei der Diskussion der Herleitung des Hebelgesetzes durch Archimedes die Sache mit dem Scheinbeweis (a.a.O. S. 71f).

zeigt, dass man alle an der Beweisstelle erforderlichen Absicherungen mittels der Strahlensätze bzw. aus Satz 14 der Abhandlung *Über das Gleichgewicht ebener Flächen I* (hier Satz 3.2) erhalten kann (vgl. die in den Beweis eingebrachten Fußnoten). Einen starken Grund, eine weitere, bisher unbekannte Archimedes Abhandlung zu unterstellen, gibt es also zwar nicht, wenn aber jemand diese Stelle (und zwei weitere, ähnlich gelagerte Vorkommnisse von *Mechanik*) zum Anlass nehmen will, um nach einer bisher unbekannten Abhandlung mit dem Titel *Mechanik* zu suchen, spricht nicht viel dagegen.

Für Anhänger eines stark mathematisch-sachlogisch geprägten Zugangs wirkt es jedoch ***etwas sonderbar***, wenn in einigen der philologisch geprägten Milieus über die Frage, ob es nun eine solche Abhandlungen gegeben hat, gegeben haben *muss* und was ihr Inhalt war und, ob ein solch möglicher Inhalt (einer bisher *nicht* aufgefunden Schrift) eine Revision unseres Archimedes Bildes erforderlich macht, ausgiebig und lange debattiert wird.

Wer jetzt glaubt, diese Schilderungen können sich nur auf einen Volkshochschulkurs zum Thema *Freies Fabulieren für Fortgeschrittene* beziehen, irrt. Solche Debatten gehören zur gelebten Wirklichkeit mancher philologischer Kreise. *Beleg*: Nach der Aufzählung dreier Stellen mit einem Vorkommnis von *Mechanik* schreibt Schneider in seinem Buch *Archimedes*:

> Das sind alle Stellen, an denen ausdrücklich unter Hinweis auf einen Titel auf mechanische Schriften verwiesen wird. Zwei weitere Stellen, an denen ein solcher Titel ergänzt werden müsste [???], beziehen sich ebenfalls auf eine Aussage über Schwerpunkte, können aber im folgenden unberücksichtigt bleiben [???]. Die aufgeführten Stellen zeigen jedenfalls, dass es Archimedische Werke mit dem Titel ‚Mechanik' bzw. ‚Elemente der Mechanik' und ‚Über Gleichgewichtslagen' gab. Die letztgenannte Schrift steht natürlich in Beziehung mit den beiden Büchern ‚Über das Gleichgewicht ebener Flächen'. In der nun ein **Jahrhundert andauernden Diskussion** wurden nahezu sämtliche möglichen Kombinationsmöglichkeiten durchgespielt: Die einfachste und weithin akzeptierte Möglichkeit ist, ‚Über das Gleichgewicht ebener Flächen I' als identisch mit oder als Teilstück der von Archimedes zitierten ‚Mechanik' anzusehen.
>
> Drei von dieser Möglichkeit abweichende und den Entwicklungsgang der Archimedischen Untersuchungen berücksichtigende Thesen sollen hier hervorgehoben werden:[138]

Nachfolgend werden von Schneider drei Ansätze vorgestellt, denen es unter Inbezugnahme eines *nie gefundenen* Archimedes Textes *vorgeblich* gelingt, die archimedischen Schriften in einen Sinnzusammenhang zu stellen und/oder uns über den Inhalt einer ganzen Reihe weiterer unauffindbarer Schriften zu informieren. Zudem werden solche bisher unauffindbaren Schriften von einschlägigen Autoren in den Entstehungsprozess der archimedischen Entdeckungen eingeordnet.[139]

> *Hinweis*: Es gibt verschiedene Methoden, seine Zeit zu verbringen. Ein schöne Fahrradtour hat den Vorteil, dass sie gesund ist und helfen kann, den Kopf von unsinnigen Gedanken zu befreien.

Den Niedergang der Wissenschaften in Byzanz bringt man gern damit in Verbindung, dass man dort dazu übergegangen war, vorwiegend Kommentare zu Kommentaren zur Interpretation klassischer Texte zu verfassen. Teile der modernen Philologie scheinen sich an der Wiederholung dieses Vorgehens zu versuchen, allerdings ohne dass dabei überhaupt ein klassischer Text vorliegen muss. Einige wenig fundierte Spekulationen zu *möglicherweise* ehemals verfassten klassischen Texten scheinen auszureichen, um das Spiel in Gang zu bringen.

Kommen wir zum zweiten Beweis.

---

138 Ivo Schneider: Archimedes. Springer Spektrum; 2. Auflage 2016. S. 27; Hervorhebung in **fett** und [???] *nicht* im Original.

139 Vgl.: Ivo Schneider: Archimedes. Springer Spektrum; 2. Auflage 2016. S. 28ff.

Anmerkungen zum zweiten Beweis

Wie der erste Beweis, so verfügt auch der zweite Beweis über ein Alleinstellungsmerkmal: Es ist das *einzige* Mal, dass Archimedes bei einer Integrationsaufgabe mit einer *einseitigen Approximation* (statt der sonst üblichen geometrischen Schachtelung) arbeitet.[140]
Weiterhin besonders ist, dass an einer entscheidenden Stelle des Beweisgangs (Satz 23) – modern gesprochen – mit einer geometrischen Reihe gearbeitet wird.
Das Hauptresultat wird im Satz 24 per *doppelter reductio ab absurdum* bewiesen. Ohne zu tief einzusteigen, sollen alle drei Punkte kurz beleuchtet werden.[141]

Einseitige Approximation

Die Approximation erfolgt durch Vielecke, die mittels Dreiecken konstruiert werden. Ausgangspunkt ist dabei ein Dreieck gemäß Schaubild 20. So ein Dreieck SPQ umfasst bereits mehr als die Hälfte des Parabelsegments. Wie sieht dabei der durch das Dreieck nicht erfasste Rest aus? Nicht erfasst werden zwei Parabelsegmente. Zu diesen beiden Parabelsegmenten lassen sich die Scheitelpunkte S_{11} und S_{12} bestimmen. Bei gegebenen Scheitelpunkten lassen sich in die beiden Parabelsegmente die einschlägigen Dreiecke eintragen. So ergibt sich die erste Stufe der Verfeinerung der Approximation (s. Schaubild 22). Als nicht erfasste Restfläche verbleiben jetzt vier Parabelsegmente. Zu jedem dieser vier Parabelsegmente lässt sich ein Scheitel bestimmen, die man mit S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24} bezeichnen kann. Mit Hilfe dieser Scheitelpunkte lassen sich dann erneut einschlägige Dreiecke eintragen. So ergibt sich die zweite Stufe der Verfeinerung der Approximation. Als nicht erfasste Restfläche verbleiben dann 8 Parabelsegmente. Mit denen man wieder nach dem gleichen Schema verfahren werden kann. Die Anschauung sagt, dass man durch fortgesetzte Anwendung dieses Schemas die Fläche des ursprünglichen Parabelsegments mit der Grundlinie $\overline{PQ}$ beliebig genau nähern kann. Und die Anschauung sagt auch, dass die bei den verschiedenen Stufen der Näherung erzeugten Vielecke stets eine kleinere Fläche als das zu approximierende Parabelsegment haben. Und die Anschauung trügt in diesem Fall nicht. Auf die Beweise hierzu wird verzichtet.

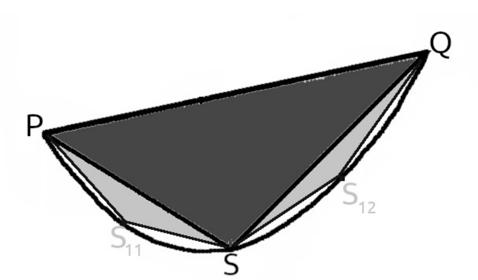

Schaubild 22: Erste Stufe der Verfeinerung der Approximation

Archimedes ergänzt diese Approximation mittels einbeschriebener Vielecke ***nicht*** durch eine Approximation durch umbeschriebene Vielecke (um so zu einer seiner geometrischen Schachtelungen zu kommen), sondern er beweist eine höchst interessante Eigenschaft dieser einseitigen Approximation:

> Beim Durchlaufen der Verfeinerungsstufen wächst die Fläche der zur Näherung verwendeten Vielecke entsprechend einer geometrische Reihe.

Die Formulierung *geometrische Reihe* fällt dabei zwar nicht, dafür ist diese Bezeichnung zu modern, aber sachlich gesehen geht es genau darum.[142]

---

140 *Hinweis*: Dijksterhuis schenkt sich das *einseitig* und spricht nur von *Approximation,* wenn er speziell das archimedische Näherungsverfahren aus dem *zweiten* Beweis zur Parabelquadratur meint. Er ist/war zwar ein überaus angesehener Archimedes Experte, aber man kann das trotzdem ungeschickt finden.

141 Obwohl Aumann mit der *modernen* Definition der Parabel arbeitet, was mathematikhistorisch gesehen nicht ganz passend scheint und sich zudem beim Aufbau des Beweisgangs wie der gewählten Beweistechnik gelegentlich erheblich von Archimedes entfernt, liefert sein Buch einen guten Einstieg in die genauere Erschließung der geometrischen Zusammenhänge bei der Parabelquadratur. Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 47ff. Wer danach noch dichter ans Original will, dem sei die Heath Übersetzung empfohlen. Thomas Heath: The Works of Archimedes. Mineola, New York. Dover Publications 2002. S. 233ff.

142 Es ist eine häufig gestellte, nicht beantwortbare Frage, ob Archimedes beim Hantieren mit der geometrischen Reihe bei der Parabelquadratur die Summenformel für unendliche geometrische Reihen (für q mit 0<q<1) im Hinterkopf hatte. Es riecht ein bisschen danach, dass er sie kannte (erraten hatte?), sie aber nicht ausdrücklich benutzen wollte.

Die geometrische Reihe

In moderner Notation ausgedrückt beweist Archimedes, dass die Fläche des zur Approximation verwendeten Vielecks nach der k-ten Verfeinerungsstufe $f \cdot \sum_{n=0}^{k} (1/4)^n$ beträgt, wobei ***f*** die Fläche des als Ausgangspunkts verwendeten Dreiecks SPQ ist.

Die Fläche der zur Approximation verwendeten Vielecke wächst mit den Verfeinerungsstufen der Näherungen also nach dem folgenden Schema:

(0) ***f***
(1) ***f*** + 1/4 ***f***
(2) ***f*** + 1/4 ***f*** + 1/16 ***f***
(3) ***f*** + 1/4 ***f*** + 1/16 ***f*** + 1/64 ***f***
(4) …

Diese Form des Wachstums beim Durchlaufen der Verfeinerungsstufen hat natürlich mit den Eigenschaften von Parabeln wie der gewählten Technik zur einseitigen Approximation zu tun. Demgemäß ist der Kern des entsprechenden Beweisgangs bei Archimedes *zutiefst geometrisch*.

Anschließend beweist Archimedes, dass (modern ausgedrückt) für jedes k (jede Stufe der Verfeinerung der Näherung) gilt:

(Satz 5.1b) $$f \cdot \sum_{n=0}^{k} (1/4)^n \quad + \quad 1/3 f \cdot (1/4)^k \quad = \quad \frac{4}{3} \; f$$

In Worten: Wenn man bei einem der (zur Näherung des Parabelsegments verwendeten) Vielecke, die Fläche nochmals um 1/3 des Flächenzuwachses aus der *letzten* Verfeinerungsstufe erhöht, landet man *immer* (unabhängig davon welche Verfeinerungsstufe man gerade gerade absolviert hat) bei einer Fläche, die 4/3 der Fläche des Dreiecks SPQ beträgt.
Satz 5.1b ergibt sich aus der *geometrischen* Reihe, die das Wachstum der Näherungen beschreibt, ist aber ansonsten *unabhängig* von jeder geometrischen Sachlage.[143]
Mittels des Satzes 5.1b kann Archimedes dann Satz 5.1 (die Parabelquadratur) beweisen.

Doppelte reductio ad absurdum

Die Kurzform der zum Beweis verwendeten *doppelten reductio ad absurdum* lautet:

> Das Parabelsegment kann nicht größer sein, da das Parabelsegment durch die zur Näherung verwendeten Vielecke (bei fortgesetzter Verfeinerung der Approximation) beliebig gut genähert werden kann und diese Vielecke aber dabei (wegen Satz 5.1b) keinesfalls größer als 4/3 ***f*** werden können;
> Das Parabelsegment kann auch nicht kleiner sein, da sich die *Differenz* zwischen der Fläche der zur Näherung verwendeten Vielecke (die stets im Parabelsegment liegen) zur Fläche 4/3 ***f*** mit wachsender Verfeinerung (wachsendem k) (wegen Satz 5.1b) beliebig klein machen lässt.
> Also beträgt die Fläche des Parabelsegments 4/3 der Fläche des Dreiecks SPQ.

Kurzes Resümee

- Zur Quadratur der Parabel liefert Archimedes ***zwei*** Beweise!
- Der *erste* Beweis verwendet *Hebelgesetz* und *Schwerpunkte*, der *zweite* Beweis eine *einseitige Approximation* und trickreiches Argumentieren auf der Grundlage einer *geometrischen Reihe*.
- Der zweite Beweis kann als Musterbeispiel für die rein geometrische Bestimmung einer krummlinig begrenzten Fläche gelten und übertrifft in puncto Strenge der Beweisführung die meisten neuzeitlichen Beweise aus der frühen Analysis.

143 Man kann den Kern des Beweises zu 5.1b aus der geometrischen Einkleidung (in der er vorgelegt wird) leicht herausschälen. Vgl.: Helmuth Gericke: Mathematik in Antike und Orient. Wiesbaden. matrix Verlag 2005. S. 119f.

Methodenlehre (von den mechanischen Lehrsätzen)

Archimedes‘ wohl genialste Leistungen gehören der Vorgeschichte der Infinitesimalrechnung an. In einer Eratosthenes gewidmeten Schrift über die Methode, die erst 1906 in einer im 10. Jh. angefertigten Abschrift wiederentdeckt wurde, erläuterte er seine auf mechanischen Überlegungen basierenden heuristischen Methoden zur Flächen- und Voluminabestimmung.
C.J. Scriba / P. Schreiber*

Archimedes suchte, so wie später auch die Mathematiker in Renaissance und Neuzeit, nach Methoden, die – abseits klassisch geometrischer Beweise – einen neuen Zugang zu den Problemen der Flächen- bzw. Voluminabestimmung *krumm* begrenzter Figuren eröffnen. In Anknüpfung an die im *ersten* Beweis zur Parabelquadratur eingesetzte Beweistechnik findet er einen produktiven Ansatz, der nicht weit von der Denkweise der frühen Analysis entfernt ist:

> Wenn man unterstellt, dass
> a) Linien sich als Summe von unendlich vielen Punkten,
> b) Flächen sich als Summe von unendlich vielen Linien
> c) und Körper sich als Summe von unendlich vielen Flächen
>
> auffassen lassen, dann lässt sich die archimedische Beweistechnik des *mechanisch eingefärbten Größenvergleichs* geometrischer Objekte entschieden produktiver anwenden.

Allerdings weiß Archimedes, dass er über keine hinreichenden Argumente verfügt, um solche Unterstellungen zu rechtfertigen. Und so nutzt er die Produktivität dieser Denkweise nur im Rahmen der *Heuristik*.

Dem dänischen Mathematikhistoriker und Philologen Heiberg gebührt das Verdienst, den Brief von Archimedes an Eratosthenes, in dem dieser seine besondere Heuristik erklärt, dokumentiert und dessen Inhalt – soweit für ihn entzifferbar – der Öffentlichkeit zugänglich gemacht zu haben.[144] Das Pergament, mit dem Heiberg sich dabei jahrelang abplagte, ist als Archimedes-Palimpsest eine mathematikhistorische Berühmtheit geworden. 1999 begann ein Projekt, um die für Heiberg unlesbar gebliebenen Passagen mit modernen Verfahren nochmals zu untersuchen.

Die Frage, welchen Einfluss es auf die Mathematikgeschichte gehabt hätte, wenn dieser Brief an Eratosthenes nicht erst 1906 sondern bereits 1406 wiederentdeckt worden wäre, führt zu allerlei interessanten Gedankenspielen. Gedankenspiele, die daran erinnern von welchen Kleinigkeiten der Weltenlauf häufig abhängt.

Die von Archimedes in seinem Brief erläuterten heuristischen Techniken werden heute allgemein als *mechanische Methode* bezeichnet.

> Jedermann war immer überzeugt gewesen, Archimedes könne seine Sätze nicht so gefunden haben wie er sie beweist, aber niemand hatte jemals geahnt, was die Schrift [der einschlägige Brief an Eratosthenes; NF] unwiderlegbar enthüllte, nämlich erstens, daß bei der Entdeckung der Resultate, die in den Werken *Über Kugel und Zylinder* und *Quadratur der Parabel* mitgeteilt werden, Theoreme aus der Mechanik eine wesentliche Rolle gespielt hatten, und zweitens, daß dabei eine Auffassung der Konstitution eines geometrischen Gebildes zu Grunde gelegen hatte, die als logisch unhaltbar schon längst aus der offiziellen griechischen Mathematik verbannt worden war und die in seinen publizierten Werken zu benutzen Archimedes nie eingefallen wäre. Die angewandten mechanischen Theoreme sind der Hebelsatz und gewisse Sätze über Schwerpunkte ebener oder körperlicher Figuren, die offiziell verpönte Auffassung aber nichts anderes als der in den älteren Phasen

---

* C.J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. Berlin, Heidelberg, New York. Springer Verlag 2003. S.67.

144 Thomas Heath hat basierend auf der in Latein verfassten Arbeit von Heiberg eine englische Übersetzung angefertigt, die er der Neuauflage seiner Archimedes Übersetzung anfügte. Spätestens seit dieser Neuauflage der Heath Übersetzung aus dem Jahr 1912 staunt die Welt – oder zumindest der mit Geschichte der Analysis vertraute Teil des Bildungsbürgertums – über die sensationelle Ausnahmebegabung des Archimedes.

> der griechischen Mathematik wahrscheinlich als vollgültig angesehene Gedanke, eine Strecke bestehe aus unendlich vielen aneinander gereihten ausdehnungslosen Punkten, eine ebene Figur sei die Summe von unendlich vielen breitelosen Strecken, ein Körper ebenso die Summe seiner ebenen Durchschnitte mit einer fließenden Ebene von konstanter Stellung, im allgemeinen jedes geometrische Gebilde könne als Anhäufung von unendlich vielen Gebilden niedriger Dimensionszahl, den später sogenannten Indivisiblen [ein Schlüsselbegriff bei Bonaventura Cavalieri; NF], betrachtet werden. Es war dies ein ebenso falscher wie fruchtbarer Gedanke, dem, wie man immer schon gewußt hat, die Entwicklung der Mathematik im 17. Jahrhundert sehr viel zu verdanken gehabt hat, von der sich aber jetzt ergab, daß sie auch der griechischen Mathematik wesentliche Dienste geleistet hat.[145]

Im Grunde sind das hier ***zwei*** Sensationen: Archimedes hat zum *einen* Ideen unweit der frühen Analysis des 17. Jahrhunderts zur Steigerung seiner mathematischen Produktivität genutzt, hat sich aber zum *anderen* von deren Produktivität nicht verführen lassen, delikate Konzepte ohne ausreichende Absicherung in seine Beweise einfließen zu lassen. Archimedes bleibt (mit Ausnahme einiger mechanisch eingefärbter Größenvergleiche beim ersten Beweis zur Parabelquadratur) bei seinen Beweisen den Standards der klassischen Geometrie treu. Als Jahrtausend-Genie konnte Archimedes sich das leisten. Dank seines Talents hatte er stets gute Chancen, seine mittels *mechanischer Methode* gefundenen Resultate durch geometrische Beweise zu unterfüttern.

Zum beinahe schon Unfasslichen, dass Archimedes fast 2.000 Jahre vor Newton und Leibniz Ideen unweit der frühen Analysis des 17. Jahrhunderts nutzte, schreibt der Noether Schüler van der Waerden:

> Die Auffassung eines Parabelsegments oder eines Dreiecks als Summe einer unendlichen Anzahl Strecken ist eng verwandt mit der Vorstellung von LEIBNIZ, der das Integral $\int y\,dx$ als Summe einer unendlichen Anzahl Glieder y dx auffasste. ARCHIMEDES ist sich aber – im Gegensatz zu LEIBNIZ – vollkommen bewusst, dass diese Auffassung tatsächlich falsch ist und dass die heuristische Herleitung zu einem strengen Beweis ergänzt werden muss.[146]

Falls jemand nun das Bedürfnis hat, jetzt sofort die nächste Kapelle aufzusuchen, um für Weierstraß, Cauchy und noch ein paar andere Heroen der Grundlegung der modernen Analysis eine Kerze anzuzünden, dann ist das nur zu verständlich. Dank solcher Heroen können wir heute mit gutem Gewissen Analysis betreiben, ohne dabei einer Pflicht zur Nachlieferung strenger, geometrischer Beweise zu unterliegen. *Newton* war in der Lage, die wohl meist zuerst mit Methoden der frühen Analysis gewonnen Resultate der *Principia* mit geometrischen Beweisen zu unterfüttern. Für viele andere wäre aber wohl eine Pflicht zur Nachlieferung geometrischer Beweise (für die mittels Analysis gewonnenen Resultate) der pure Albtraum.[147]

Herleitungen mittels mechanischer Methode

Archimedes präsentiert in seiner an Eratosthenes adressierten Abhandlung verschiedene Beispiele zur Anwendung seiner *mechanischen Methode*. Er leitet dabei Resultate, zu denen er bereits einen geometrischen Beweis veröffentlicht hat, für Eratosthenes *nochmals* und auf ganz andere Weise her. Dabei stellt Archimedes klar, dass hinsichtlich der Abfolge seiner mathematischen Fortschritte ihm die Herleitungen mittels *mechanischer Methode* jeweils *vor* dem Auffinden der geometrischen Beweise gelungen waren. Die Präsentation der Beispiele zur *mechanischen Methode* hat für Archimedes

145 Dijksterhuis: Archimedes und seine Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft. In: Abhandlungen zur Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftslehre. Bremen. Carl Schünemann Verlag 1952. S. 19f.

146 B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Basel, Stuttgart. Birkhäuser Verlag 1956. S. 356.

147 Es hat schon seinen Grund, warum in der klassischen Aufzählung der absoluten mathematischen Ausnahme-begabungen auf *Archimedes* als nächstes *Newton* folgt. Obwohl Newton die frühe Analysis keineswegs nur als heuristisches Hilfsmittel betrachtete, besaß er – auf Grund seines Talents - die Möglichkeit, seine Beweise in der *Principia*, ohne Rückgriff auf die Analysis, nur mit den Methoden der Geometrie zu formulieren.

keinesfalls die Funktion, neue Prioritätsansprüche zu erheben. Archimedes weist vielmehr auf die Schwächen dieser Herleitungen ausdrücklich hin.

Seinen Einführungskurs in die besondere Art seiner heuristischen Methoden beginnt Archimedes bei den Themen Parabelquadratur und Kugelvolumen.

Die Werkzeuge, deren sich Archimedes dabei bedient, lassen sich ganz natürlich in drei Gruppen einteilen:

1. Die Standardwerkzeuge eines antiken Geometers;
2. Methoden des mechanisch eingefärbten Größenvergleichs, wie Archimedes sie beim ersten Beweis zur Parabelquadratur benutzt;[148]
3. Übergänge von Linien zu Flächen bzw. von Flächen zu Körpern, wobei die Flächen als unendliche Summen von Linien und Körper als unendliche Summen von Flächen gedeutet werden.

Die Standardwerkzeuge der antiken Geometer aus Position (1) sind natürlich gänzlich unproblematisch.

Die von ihm in *Über das Gleichgewicht ebener Flächen* neu geschaffene Beweistechnik des mechanisch eingefärbten Größenvergleichs – die Position (2) der obigen Liste – schätzt Archimedes als unproblematisch ein, ist jedoch – wie im Abschnitt *3. Schwerpunkt, Hebel, Gleichgewicht* erläutert wurde – nicht frei von Problemen. Allerdings lassen sich die mit dieser Beweistechnik gewonnenen Resultate meist unproblematisch auch auf anderem Wege erzielen, was man zur wohlwollenden Sanierung der Schwächen entsprechender Beweisgänge nutzen kann.

Die Position (3) ist auch in den Augen von Archimedes problematisch, weswegen er die Herleitungen mittels *mechanischer Methode* nicht als Beweise betrachtet. Trotz dieser Einschränkung: Als entscheidendes Treibmittel einer leistungsstarken heuristischen Technik wurden die entsprechenden Überlegungen – so erfahren wir – gern genutzt. Und so diente Archimedes seine *mechanische Methode* als wichtiges Hilfsmittel für seine mathematischen Entdeckungen. Und sie halfen auch bei der Planung der ja teils längeren geometrischen Beweisgänge.

Beim Satz 1 aus der Methodenlehre – der Herleitung seines Resultats zur Parabelquadratur – gewinnt Archimedes, unter Rückgriff auf die Positionen (1) und (2) seines Werkzeugkastens, zunächst Resultate zu Größenvergleichen von Strecken,[149] um dann darauf aufbauend – gemäß Position (3) – auf Größenverhältnisse zwischen Flächen zu schließen.[150]

Der Herleitung lässt Archimedes folgende Anmerkung folgen:

> Die hier ausgesprochene Tatsache ist nun durch das Gesagte nicht wirklich bewiesen; aber es deutet darauf hin, daß der Schluß richtig ist. Da wir also sehen, daß der Satz nicht bewiesen ist, aber zugleich vermuten, daß das Ergebnis richtig ist, so brauchen wir einen geometrischen Beweis, den ich gefunden und bereits veröffentlicht habe.[151]

Der Satz 2 aus der Methodenlehre beschäftigt sich mit dem Volumen der Kugel. Archimedes betrachtet dafür zunächst Größenvergleiche zwischen Schnittflächen. Dabei werden die Schnittflächen eines Kegels und einer Kugel *zusammengenommen* mit den Schnittflächen eines Zylinders per Hebelgesetz verglichen, um so auf die Volumenverhältnisse der ganzen Körper schließen zu können.

Um einen ersten Eindruck davon zu bekommen, wie nah Archimedes dabei dem Prinzip von Cavalieri kommt, kann man mitten in den Beweis hineinspringen und folgende Passage auf sich wirken lassen:

---

148 Siehe den als Beispiel präsentierten Satz 6 aus der Parabelquadratur auf Seite 45 dieses Papiers.

149 Dies geschieht mittels mechanisch eingefärbter Größenvergleiche über das Hebelgesetz. Als Schwerpunkt der Strecken gilt dabei ihr Mittelpunkt.

150 Eine Erschließung dieser Herleitung findet man bei Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 70ff.

151 Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 419.

> Daher ist der Schnittkreis des Zylinders, so wie er liegt, in Bezug auf ***A*** [dem Drehpunkt der zwei Hebelarme; NF] im Gleichgewicht mit dem Schnittkreis der Kugel zusammen mit dem des Kegels, wenn die beiden letzten Kreise mit ihrem Schwerpunkt nach ***H*** [dem Ende des anderen Hebelarms; NF] verlegt sind.
>
> (…)
>
> Behandeln wir in derselben Weise alle die Gruppen von je drei Kreisen, in denen die zu ***AC*** senkrechten Ebenen den Zylinder, die Kugel und den Kegel schneiden und aus denen diese drei Körper zusammengesetzt sind, so folgt, daß der Zylinder in der Lage, in der er ist, sich in Bezug auf ***A*** im Gleichgewicht befindet mit der Kugel und dem Kegel zusammengenommen, wenn beide mit ihrem Schwerpunkten nach **H** gebracht werden.[152]

Die an der Konstruktion beteiligten Körper, die Art der Erzeugung der Schnittkreise wie den spezifischen Ansatz beim Einsatz des Hebelgesetzes kann man aus dieser kurzen Passage natürlich nicht richtig erkennen.[153] Klar wird aber, dass von mechanisch eingefärbten Größenvergleichen von *Schnittflächen* auf Gleichgewichtslagen zwischen den (geschnittenen) Körpern geschlossen wird, woraus dann die *Volumenverhältnisse* dieser Körper hergeleitet werden können.[154]

Das ist wirklich nicht weit vom *Prinzip von Cavalieri* entfernt:

> Zwei Körper besitzen dasselbe Volumen, wenn alle ihre Schnittflächen in Ebenen parallel zu einer Grundebene in gleichen Höhen den gleichen Flächeninhalt haben.

Im Unterschied zur obigen Formulierung des Cavalieri Prinzips kann man bei der *mechanischen Methode* mehr als zwei Körper in den Vergleich einbeziehen und die Positionierung von Flächen und Körpern an den Hebelarmen steht als zusätzlicher Freiheitsgrad zur Verfügung. Das bedeutet natürlich auch, dass die so verglichenen Flächen keineswegs gleich groß sein müssen. Die *mechanische Methode* des Archimedes ist insgesamt etwas flexibler, allerdings bei voller Nutzung aller Möglichkeiten auch schwieriger zu handhaben als das *Prinzip von Cavalieri*.

Man kann das *Cavalieri Prinzip* sogar als *Spezialfall* der *mechanischen Methode* deuten:

> Zwei gleiche Flächen die im gleichen Abstand vom Drehpunkt an die zwei Hebelarme angehängt werden, befinden sich im Gleichgewicht. Wenn alle einschlägigen Schnitte zweier Körper gleiche Flächen haben, dann sind sie (entsprechender platziert) stets im Gleichgewicht. Also befinden sich (gemäß Schlussweise der mechanischen Methode) auch die zugehörigen Körper (falls identisch wie die Flächen platziert) im Gleichgewicht, also haben sie das gleiche Volumen.
>
> Ergo: Zwei Körper besitzen dasselbe Volumen, wenn alle ihre Schnittflächen in Ebenen parallel zu einer Grundebene in gleichen Höhen den gleichen Flächeninhalt haben.

Eine solche Betrachtung liefert jedoch, da würde Archimedes wohl sofort zustimmen, keinen Beweis für das *Prinzip von Cavalieri.* Allerdings können solche Betrachtungen gut mit dem Niveau der Diskussionen um *Indivisible* (wie man sie aus dem 17. Jahrhundert kennt) mithalten.[155]

Die antike Vorsicht bei unendlichen Summen

Archimedes scheut sich ganz offensichtlich, *unendliche Summen* in irgendeiner Form für hoffähig zu erklären und in seine „offiziellen“ Beweise einzubeziehen. Und Archimedes steht mit dieser besonderen Vorsicht gegenüber dem Unendlichen in der Antike nicht

152 Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 420.

153 Wem dieser kleine Appetithappen zur *mechanischen Methode* nicht genügt, dem sei zusätzlich zur Heath Übersetzung die Erschließung bei Günter Aumann: Archimedes. Darmstadt. WBG 2013. S. 123ff oder B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Basel, Stuttgart. Birkhäuser Verlag 1956. S. 354ff empfohlen.

154 Woraus sich dann, in einem weiteren Schritt, die Volumenverhältnisse anderer (hier speziell interessierender) Körper ableiten lassen, so dass man letztendlich beim Satz 2.2 (*Das Volumen der Kugel beträgt 2/3 des umschreibenden Zylinders*) landet.

155 Vgl. hierzu auch Thomas Sonar: 3000 Jahre Analysis. Berlin, Heidelberg. Springer 2011. S. 157ff.

alleine da. Es sind vor allem zwei Namen aus der Antike, die man traditionell mit den Vorbehalten gegenüber einem zu naiven Umgang mit dem Unendlichen in Verbindung bringt:

Eudoxos (ca. 408 – 347 v.Chr.) und Aristoteles (384 – 322 v.Chr.).

Die beiden sind sich (vermutlich) in Platons Akademie begegnet[156] und haben sich vielleicht sogar irgendwann über das beide interessierende Thema des richtigen Umgangs mit dem Unendlichen ausgetauscht. Hinter der von beiden propagierten Vorsicht stehen dabei konkrete, beunruhigende (Denk-)Erfahrungen. Zwei dieser – viele antike Gelehrte beunruhigenden – (Denk-)Erfahrungen sollen hier beispielhaft angeführt werden.

Zuerst ein von Demokrit[157] gefundenes Paradoxon, das Plutarch wie folgt beschreibt:

> Wenn ein Kegel mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird [und es ist klar, daß eine der Grundfläche unendlich benachbarte Ebene gemeint ist], was haben wir von den Flächen der Schnitte zu denken? Sind sie gleich oder ungleich? Denn sind sie ungleich, so werden sie den Kegel unregelmäßig machen, da er dann viele stufenartige Einschnitte und Unebenheiten hat; sind sie aber gleich, so sind die Schnitte gleich, und der Kegel scheint die Eigenschaft des Zylinders zu haben und aus gleichen, nicht ungleichen, Kreisen zusammengesetzt zu sein, was ganz widersinnig ist.[158]

Das Bild, dass der Kegel als Summe unendlich vieler Kegelschnitte gedacht werden kann, kommt hier erkennbar ins Wanken. Man kann die Schwierigkeiten zwar beseitigen, aber dabei bleibt das Bild vom Kegel als einer unendlichen Summe von Kegelschnitten auf der Strecke.

Als zweites Beispiel soll das Paradoxon des *fliegenden Pfeils* von Zenon dienen.[159] Aristoteles berichtet dazu folgendes:

> Da alles, was sich bewegend verändert, in der Zeit sich bewegt und von etwas fort zu etwas hin wechselt, (so gilt auch:) In der Zeit, in welcher es sich bewegt, und zwar der unmittelbaren, nicht über (Bewegung) in einem ihrer Teile vermittelt, kann das Bewegte unmöglich an einer bestimmten Stelle sein. Denn es ist doch gerade Ruhen so bestimmt, als »eine bestimmte Zeit lang als Ganzes für sich und bezogen auf jeden seiner Teile an derselben (Stelle) sein«. Genau in dem Sinne sprechen wir doch von »Ruhen«: Wenn in einem Jetzt und wieder einem es wahr ist zu sagen: »Es selbst (als Ganzes) und seine Teile sind an derselben (Stelle)«. Wenn nun aber das eben Ruhen ist, dann geht es nicht, daß ein Wechselndes [ein Bewegtes; NF] als Ganzes, bezogen auf die unmittelbare Zeit (des Wechsels [der Bewegung; NF]) an einer bestimmten Stelle ist;
> (Aristoteles: Physik. Buch VI, Kap. 9, 239a)[160]

Auf solchen, hier von Aristoteles wiedergegebenen, vorbereitenden Überlegungen baut das entscheidende Argument Zenons auf:

> Jedes Objekt ist zu jedem beliebigen Jetzt an einem bestimmten Ort. Da die ganze Zeit aber letztlich nur aus unteilbaren Jetzten besteht, und sich alles zu jedem Jetzt an einem bestimmten Ort befindet (den es während des Jetzt auch nicht ändert), so befindet sich alles immer in Ruhe, Bewegung kann es deswegen nicht geben. Der fliegende Pfeil ist eine Illusion, die wir unseren unzuverlässigen Sinnen verdanken.

---

156 Vgl. Aristoteles: Logik und Methodik in der Antike Abschnitt *Grunddaten der Aristoteles Biographie* auf www.antike-griechische.de.

157 Es handelt sich hierbei um jenen Demokrit, der bereits vor Eudoxos die Vermutung geäußert hatte, dass das Volumen eines Kegels ein Drittel des umschreibenden Zylinders beträgt. Demokrit konnte seine Vermutung allerdings nicht beweisen. Das gelang erst Eudoxos. Über diese Sachverhalte sind wir durch entsprechende Bemerkungen, die Archimedes in der Methodenlehre fallen lässt, informiert.

158 Plutarch: De Comm. Not. adv. Stoicos XXXIX. 3 zitiert nach Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 415.

159 Vgl. Vorsokratik: Von Xenophanes bis Demokrit Abschnitt *Zenon von Elea* auf www.antike-griechische.de.

160 Aristoteles: Philosophische Schriften. Bd. 6. Physik. Übersetzt von Hans Günter Zekl. Hamburg: Meiner Verlag 1995. S. 163; Einige Teile des Aristoteles Zitats wirken zwar (ohne größere exegetische Bemühungen) etwas unklar, aber der entscheidende Teil der Überlegung tritt hinreichend deutlich hervor.

Die Vorstellung, dass Zeitintervalle nichts anderes sind als eine unendliche Summe von Zeitpunkten, ist also nicht ohne Probleme. Sieht es da bei den Strecken und Punkten der Geometrie wirklich besser aus? Lassen sich dort nicht analoge Paradoxa konstruieren?

Angesichts solcher Probleme galt es zur Zeit des Archimedes als guter Ratschlag, die Fallstricke des Unendlichen wo immer möglich zu meiden und sich bei seinen Beweisen auf kein unnötiges Risiko zur Verwicklung in Paradoxa einzulassen. Und wenn es denn sich gar nicht vermeiden ließ, etwas Umgang mit dem Unendlichen zu pflegen, so sollte man seinen Umgang – so die deutliche Empfehlung des Aristoteles – strikt auf das potentiell Unendliche beschränken.

Diese Art der Vorsicht und der Selbstbeschränkung beim Umgang mit dem Unendlichen bzw. unendlichen Summen hatte also beim Ringen um eine Kultur des klugen Verstandesgebrauchs durchaus seine Berechtigung.

Dieses Ausmaß an Vorsicht war vielen Protagonisten der frühen Analysis fremd. Sie hatten, wenn es ums Unendliche ging, wesentlich weniger Skrupel als der der antiken Strenge verpflichtete Archimedes. Und letztlich hat sich dieses in Renaissance und Neuzeit praktizierte Hintanstellen von Bedenken für die Mathematik ja gelohnt.

Sollte da jener Archimedes, der anlässlich seiner Beschäftigung mit Hebelgesetz und Schwerpunkten sich an einer gänzlich neuen Beweistechnik zum Vergleich von Größen versucht hat, so gar keinen Versuch unternommen haben, die von ihm ja als höchst fruchtbar eingeschätzte *mechanische Methode* auf solidere Füße zu stellen, um auch sie in den Rang einer neuen Beweistechnik erheben zu können? Hat Archimedes gar nicht über Möglichkeiten zur Bändigung des Unendlichen nachgedacht?

Neuigkeiten vom Archimedes-Palimsest?

Im Zusammenhang mit der neuerlichen Untersuchung des Archimedes-Palimsests wird in genau dieser Hinsicht von einer neuerlichen Sensation berichtet. Allerdings sind die bisher bekannt gewordenen Belege für diese Sensation dünn und die berichtenden Wissenschaftler (Reviel Netz, William Noel) sind in diesem Papier bereits früher durch ihre Neigung zu rauschhafter Übertreibung auffällig geworden.[161]

Trotz alldem soll die angebliche sensationelle Neuigkeit nicht unterschlagen werden:

> Es wurden bei der technisch sehr aufwendigen, neuerlichen Untersuchung des Archimedes-Palimsests einige wenige weitere Stellen (jenseits des bereits von Heiberg dokumentierten Textes) aus der Methodenlehre lesbar gemacht. Diese neu zugänglich gemachten Textstellen werden von einigen nun so gedeutet, dass sich Archimedes tatsächlich an der Bändigung des Unendlichen und zwar des aktual Unendlichen versucht hat und dabei bis zum Gedanken Cantors, zum Vergleich unendlicher Mengen eineindeutige Abbildung zu nutzen, vorgestoßen sei:

> Er [Archimedes; NF] behauptet, eine unendliche Menge sei in ihrer Vielheit gleich einer anderen unendlichen Menge, weil es eine Eins-zu-eins-Beziehung zwischen diesen beiden Mengen gibt. Er sagt das zwar nicht explizit, aber Archimedes war nie ein besonders expliziter Autor. Er überließ dem Leser immer noch viel Arbeit.
> (…)
> Interessanterweise war es genau dieses Mittel der Eins-zu-eins-Beziehung, mit dem das Konzept der Unendlichkeit gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts schließlich gezähmt werden konnte. Hier liegt der Grundstein der modernen Mengenlehre.[162]

Man kann nicht sagen, dass diese Deutung (die, gemessen an der Größe der vermeldeten Sensation, nur durch dünne Indizien gestützt wird) allgemein akzeptiert wird. Es kann wirklich gut sein, dass hier der Wunsch (nach einer Sensation) der Vater des Gedankens war.

Anderseits: Es geht um Archimedes. Da sollte man nichts vorschnell ausschließen!

161 Vgl. hierzu das Zitat auf Seite 33 dieses Papiers.
162 Reviel Netz & William Noel: Der Kodex des Archimedes. München. dtv 2010. S. 203.

Sandrechnung und Rinderproblem

> Ich vermute, König Gelon, daß diese Dinge der großen Menge von Leuten, die sich nicht mit Mathematik beschäftigt haben, unglaublich erscheinen, denen aber, die etwas davon verstehen und die Erörterung der Entfernungen und Größen der Erde, der Sonne, des Mondes und des ganzen Weltalls verfolgt haben, auf Grund des Beweises einleuchten werden.
> Archimedes*

Nach der Methodenlehre sollen in diesem Abschnitt zwei weitere Archimedes Arbeiten ohne neue Prioritätsansprüche vorgestellt werden.

- In *Sandrechnung* geht es um kosmologische Modelle und astronomische Entfernungen. Der Adressat dieser Abhandlung lebt ausnahmsweise nicht in Alexandria, sondern in Syrakus. Es handelt sich um Gelon, den Sohn von Hieron II.
- Das *Rinderproblem* ist eine etwas besondere Hinterlassenschaft von Archimedes: Eine gemeinhin *Rinderproblem* genannte Knobelaufgabe wurde von ihm vermutlich Eratosthenes gestellt.

Die Sandrechnung

In einem erheblichen Teil des Textes geht es darum, dass eine Beschreibung der Größe des Kosmos nicht daran scheitern wird, dass es keine hinreichend großen Zahlen gibt. Für uns heute, die wir arabische Ziffern in einem dezimalen Stellenwertsystem verwenden und zudem die Möglichkeit der Exponentenschreibweise kennen, klingt die Frage, ob es überhaupt hinreichend große Zahlen gibt, um auch astronomische Größen beschreiben zu können, fast schon wie eine Kinderfrage.

Wenn man die in der griechischen Antike verwendeten Zahlsysteme kennt, dann weiß man aber, dass die Frage, wie man denn überhaupt astronomische Größen und Größenverhältnisse mittels Zahlen beschreiben können soll, damals schon etwas herausfordernder war. Und nimmt man sich speziell die von Archimedes untersuchte Frage, wie viele Sandkörner man denn zum Ausfüllen des ganzen (als endlich unterstellten) Kosmos bräuchte, vor, dann wird auch ein gestandener Altphilologe zugeben, dass die Größenordnungen, in denen man sich bei dieser Frage zwangsläufig bewegt, erst einmal jenseits des Horizonts der griechischen Zahlsysteme zu liegen scheinen.[163]

Archimedes zeigt aber auf, wie man Zahlsysteme immer fort so erweitern kann, dass man beliebig große Zahlen benennen kann. Die speziellen Verfahren und kleinen Tricks, die Archimedes dabei verwendet, sollen hier übergangen werden. Sie setzen eine gewisse Vertrautheit mit antiken Zahlsystemen voraus.[164]

Zwei kosmologische Modelle – Eins davon heliozentrisch

Für den modernen Leser wesentlich interessanter ist, dass Archimedes neben dem damals dominierenden *geozentrischen* Modell auch das *heliozentrische* Modell des Aristarchos von Samos vorstellt. Archimedes schildert das heliozentrische Modell wie folgt:

---

* Die Schlussbemerkung, mit der Archimedes den Text *Sandrechnung* beendet; zitiert nach: Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 353. Häufig wird diese Stelle gekürzt zitiert: „Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die nicht Mathematik studiert haben."

163 Im Griechischen steht *Myriade* sowohl für 10.000 wie für Vielzahl/vielzählig. Darüber hinaus macht das Griechische erst einmal kein Angebot zur Benennung von großen Zahlen. Zusätzlich sind die Zahlzeichen von Buchstaben abgeleitet und ein Stellenwertsystem wird im Griechischen nicht benutzt. Bei aufwendigen Berechnungen wechselten griechische Astronomen deswegen manchmal zum Sexagesimalsystem sumerischen Ursprungs, das sie über die babylonische Astronomie kennen gelernt hatten.

164 Wer sich für die Zahlsysteme der antiken Griechen zur Zeit von Archimedes interessiert, dem sei Kapitel IV im Vorspann der Heath Übersetzung empfohlen: Thomas Heath: The Works of Archimedes. Mineola, New York. Dover Publications 2002. S. lxiii ff.

> Aristarch von Samos [= Aristarchos von Samos; NF] hat nun ein aus gewissen Hypothesen bestehendes Buch herausgegeben, in dem die Annahmen zu dem Ergebnis führen, daß das Weltall vielemal so groß ist wie das, was ich eben [beim geozentrischen Modell; NF] so genannt habe. Er setzt voraus, dass die Fixsterne und die Sonne unbeweglich seien, daß die Erde sich in einer Kreislinie um die Sonne bewege, die im Mittelpunkte der Bahn liege, und daß die Kugel der Fixsterne, um denselben Mittelpunkt wie die Sonne gelegen, so groß sei, daß der Kreis, den er sich von der Erde durchlaufen denkt, sich zu der Entfernung der Fixsterne verhält wie der Mittelpunkt der Kugel zu ihrer Oberfläche. Nun ist leicht zu sehen, daß das nicht möglich ist; denn da der Mittelpunkt einer Kugel keine Größe hat, können wir nicht sagen, daß er zu der Oberfläche der Kugel irgendein Verhältnis habe. Wir müssen jedoch annehmen, daß Aristarch folgendes meint: da wir uns die Erde gewissermaßen als Mittelpunkt des Weltalls denken, ist das Verhältnis der Erde zu dem was wir [im geozentrischen Modell; NF] „Weltall“ nennen, dasselbe wie das Verhältnis der Kugel, die den Kreis enthält, den er sich von der Erde durchlaufen denkt, zu der Kugel der Fixsterne.[165]

Diese Passage lässt sich gut so deuten, dass Aristarchos wie Archimedes wussten, dass das heliozentrische Modell eine im Wechsel der Jahreszeiten auftretende Parallaxe – eine scheinbare Veränderung der Position – der Fixsterne erfordert. Da diese nicht beobachtbar war, konnte dies – wenn man das heliozentrische Modell zugrunde legt – nur bedeuten, dass die Fixsterne so weit entfernt sind, dass die Parallaxe mit den vorhandenen Mitteln nicht festgestellt werden konnte, sprich, dass die *Änderung* des Winkels, unter dem die Fixsterne erscheinen, zu klein, ist um mit den damaligen Mitteln messbar zu sein.[166]

Es ist anzumerken, dass Archimedes kein Wort darüber verliert, ob das heliozentrische Modell mit der Alltagserfahrung oder der religiösen Überlieferung harmoniert. Es ist eine Hypothese, vielleicht keine die er unbedingt teilt, aber immerhin eine, die es zu erwähnen lohnt. Eine sehr nüchterne Sicht auf kosmologische Fragen!

Astronomische Berechnungen zur Größe des Weltalls

Nachdem Archimedes den Raum der benannten Zahlen dramatisch vergrößert hat, macht er sich auf, um zu berechnen *wie viele Sandkörner nötig wären*, um den Kosmos damit komplett auszufüllen. Er betrachtet dabei zunächst das Weltall aus der Sicht des geozentrischen Modells, kommt aber anschließend auch auf das heliozentrische Modell zu sprechen.

Beim geozentrischen Modell kommt Archimedes zum Ergebnis, dass 10^{51} Sandkörner ausreichend Sand wäre, beim heliozentrischen Modell müssten es fast 10^{63} sein.[167]

Diese Sandmengen wären riesig, würden rechnerisch jedoch keinesfalls ausreichen, um das *sichtbare Universum* auszufüllen.[168] Nichts desto trotz steht dieser Archimedes Text moderner Astronomie natürlich deutlich näher als Platons einflussreicher Timaios. Es gibt bei Archimedes keine metaphysische Einbettung astronomischer Überlegungen, es tritt kein Schöpfergott namens *Demiurg* auf und statt der Suche nach einer göttlichen, sinnstiftenden Vernunft im Universum stehen Hypothesen, Messungen und Berechnungen im Vordergrund. Etwas, was trotz aller Fehler ein riesiger Fortschritt ist.

Die Methodik die Archimedes wählt, sorgt dafür, dass die Fehler, die er begeht sich beim Fortschritt der Wissenschaften vergleichsweise leicht identifizieren und beheben ließen. Er selbst hat für die dabei erfolgten Fehlerkorrekturen wichtige Grundlagen gelegt.

Wer sich an vieldeutigen Formulierungen ergötzen will oder meint, er brauche eine Rechtfertigung für seinen Glauben an einen wohlwollenden Schöpfergott, der ist bei Platon besser aufgehoben. Dem Rest sei zu einer Kosmologie mit Hypothesen, Messungen und Berechnungen zugeraten. Selbst deren Fehler sind lehrreicher als Platons Metaphysik!

---

165 Thomas Heath: Archimedes' Werke, (aus dem Englischen von F. Kliem). Berlin. Verlag O. Häring 1914. S. 343f.

166 Vgl. Eudoxos & Co. - Die Anfänge der wissenschaftlichen Astronomie, Abschnitt *Das heliozentrische Weltbild des Aristarchos von Samos* auf www.antike-griechische.de.

167 Diese Angaben wurden ohne Überprüfung von Heath übernommen.

168 Die Wirkungen derartiger Sandberge auf die Raum-Zeit-Struktur soll hierbei unberücksichtigt bleiben.

Ein Planetarium als Beutestück

Im Zusammenhang mit den kosmologischen Betrachtungen in der Sandrechnung lohnt es, kurz auf das von Archimedes konstruierte Planetarium einzugehen. Viel kann man dazu allerdings nicht sagen. Archimedes hat zwar eine Abhandlung zum Bau von Planetarien verfasst, diese ist jedoch verloren gegangen.

Wir wissen nur, dass es ein von Archimedes konstruiertes (vermutlich nicht begehbares, vergleichsweise kleines) Planetarium in Syrakus gab und dass Marcellus, der Eroberer von Syrakus, es nach dem Fall von Syrakus nach Rom bringen ließ. Dort fand es viel Bewunderung. Cicero bereichert durch Verweis auf das Planetarium seine Diskussion zum göttlichen Ursprung der Erfindungsgabe.[169] Immerhin wissen wir durch diese Cicero Äußerungen, dass das Planetarium heil in Rom ankam.

Es ist naheliegend zu vermuten, dass Archimedes seine Konstruktion stark an jenen Eudoxos-Kallippos Modellen orientierte, die Aristoteles zu einer Gesamtsicht des Planetensystems integrierte.[170] Sicher ist das aber nicht. Neuerdings wird diskutiert ob es beim Antikythera-Mechanismus einen Zusammenhang mit der Technologie des archimedischen Planetariums gibt.

Das Rinderproblem

Das *Rinderproblem* ist eine kuriose Knobelaufgabe. Es soll eine Rinderherde so zusammengesetzt werden, dass 7 bestimmte Proportionen für die Anteile an Bullen und Kühen mit vier verschiedenen Felltypen (weiß, schwarz, gelb, gefleckt) gewahrt werden. Zudem soll die Summe der *weißen plus schwarzen Bullen* eine Quadratzahl sowie die Summe der *gelben plus gefleckten Bullen* eine Dreieckszahl ergeben.

Natürlich sind nur ganzzahlige Lösungen erlaubt. Die kleinst mögliche Lösung für die Herdengröße hat 206545 *dezimale Stellen*. Die ersten fünfzig Stellen lauten:

7760271406486818269530232833213886664232322405 …

die letzten fünfzig Stellen lauten:

… 05994630144292500354883118973723406626719455O8

Der Ausdruck der kleinstmöglichen Lösung für die Herdengröße erforderte 42 Seiten.[171]

Man geht wohl kein besonderes Risiko ein, wenn man annimmt, dass Archimedes die Lösung des Problems, das er hier präsentiert, selber nicht bestimmt hat.

Warum stellt er aber dann ein derart verrücktes Rätsel? Nun, das, was Archimedes zu diesem Rätsel durchaus wissen konnte, war, dass es keine kleinen Lösungen geben kann.

Ist Archimedes zugetragen worden, dass man sich in Alexandria oder anderen Orts darüber lustig machte, dass er seine Zeit damit verbringt, neue Verfahren zur Bezeichnung monströs großer Zahlen zu entwickeln? Wollte er mit dem Rinderproblem-Rätsel deutlich machen, wie schnell man in die Verlegenheit kommen kann, monströs große Zahlen zu benötigen und ist dabei etwas übers Ziel hinausgeschossen?

Das *Rinderproblem* ist als Teil eines Gedichts mit dem Adressaten Eratosthenes von Lessing 1773 (wieder) entdeckt worden. Mit Eratosthenes verband Archimedes wohl eine gewisse Rivalität. Ohne Zweifel hielt sich Archimedes für den besseren Mann und hätte gut empfindlich reagieren können, wenn er vernommen hätte, dass sich Eratosthenes über seinen Brief an Gelon lustig macht. Aber das ist nur ein Einfall; alles ohne jeden Beleg.

169 Vgl. Cicero: Gespräche in Tusculum. Buch I, 63.

170 Vgl. Eudoxos & Co. - Die Anfänge der wissenschaftlichen Astronomie, Abschnitt *Eudoxos, der einflussreiche Astronom* auf www.antike-griechische.de.

171 Vgl.: Solution of the Cattle Problem by H. C. Williams, R. A. German and C. R. Zarnke https://www.ams.org/mcom/1965-19-092/S0025-5718-65-99945-X/S0025-5718-65-99945-X.pdf

Verschollenes und Ausgelassenes

Heron, Pappus (= Pappos; NF) and Theon all cite works of Archimedes which no longer survive, a fact which shows that such works were still extant at Alexandria as late as the third and fourth centeries A.D.
Sir Thomas Heath*

Eine Reihe von Archimedes Texten ging verloren, das ist unstrittig. Wieviele Texte verloren gingen und welche Titel auf die Liste der Verluste gehören, ist hingegen ein umstrittenes Thema. Im Zusammenhang mit der Diskussion von Satz 6 beim *ersten* Beweis zur *Quadratur der Parabel* ist dieser Punkt bereits berührt worden.

Auf die Liste der verlorenen Texte gehören auf jeden Fall eine Abhandlung *Über Hebel* (eine Abhandlung die vielleicht einige der offenen Fragen zum archimedischen Verständnis von Gleichgewicht und Schwerpunkt erhellen könnte) sowie der Text zum Bau von *Planetarien*. Außerdem fehlt uns seine Untersuchung zu *halbregelmäßigen Polyedern*, die Archimedes zu Ehren auch archimedische Körper genannt werden.

Sehr wahrscheinlich hat Archimedes auch eine Abhandlung zur Konstruktion des *regelmäßigen Siebenecks* verfasst.

> Obgleich die Zuweisung an Archimedes nicht gesichert ist, sei hier noch auf die nur arabisch überlieferte Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks hingewiesen. Das regelmäßige Dreieck, Viereck (= Quadrat), Fünfeck und Sechseck lassen sich bekanntlich mit Zirkel und Lineal in einen gegebenen Kreis einbeschreiben. Das geht beim Siebeneck nicht mehr – algebraisch führt die Teilung des Kreises in sieben gleiche Teile auf eine kubische Gleichung und gehört daher der gleichen Problemklasse an wie die Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung. Die angeblich von Archimedes gefundene Konstruktion arbeitet zwar auch nur mit diesen beiden Geräten, verwendet das Lineal allerdings in einer in der euklidischen Geometrie nicht erlaubten Weise: es wird solange um einen festen Punkt gedreht, bis zwei Dreiecke, von denen eines bei der Drehung anwächst, während das andere abnimmt, flächengleich sind (…). Es ist dies ein besonderer Typus von Einschiebungskonstruktion oder sog. Neusis.[172]

Die Frage, ob Archimedes einen Text zu *Brennspiegeln* geschrieben hat, kann als sehr umstritten eingestuft werden.[173] Die Frage, ob er sich mit der Optik von Spiegeln (Katoptrik) beschäftigt und dazu eine verloren gegangene Abhandlung verfasst hat, ist nicht ganz so umstritten, allerdings gibt es auch hierzu keinen klaren Konsens.

Es gibt einige Anhaltspunkte dafür, dass Archimedes eine verloren gegangene Schrift zur Arithmetik verfasst hat. Vielleicht hat Archimedes zudem, jenseits der überlieferten Abhandlung *Über das Gleichgewicht ebener Flächen I, II* und der bereits oben als verloren gezählten Abhandlung *Über Hebel,* weitere Texte zur Mechanik verfasst.

Bei der *Kreismessung* wie beim nicht vorgestellten *Stomachion*, einem Text zu einer Art geometrischen Puzzle, sind größere Teile verloren gegangen.

Gut tradiert, aber hier trotzdem in diesem Papier nicht behandelt, wurde eine längere Abhandlung zu Rotationskörpern: *Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide*. Genauso wurde das sogenannte *Buch der Hilfssätze* (*Book of Lemmas*) hier ignoriert. Bei beiden Texten ist es schwer, einen Zugang zu finden, der mit der Zielsetzung *gehobene Allgemeinbildung* harmoniert.

Die restlichen Schriften wurden jeweils an Hand ausgewählter Sätze/Inhalte vorgestellt.

---

* Thomas Heath: A History of Greek Mathematics, Vol. II. New York. Dover Publications 1981. S.25.

172 C.J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. Berlin, Heidelberg, New York. Springer Verlag 2003. S. 70. *Hinweis*: Der Hinweis „kubische Gleichung“ für den Ausschluss einer Konstruierbarkeit mittels Zirkel und Lineal ist etwas ungenau ($x^3 - 1 = 0$ ist schließlich auch eine kubische Gleichung).

173 Es gibt eine Diskussion, ob Archimedes Brennspiegel konstruiert hat, mit denen man Schiffe aus größerer Entfernung in Brand setzen konnte und ob derartige Brennspiegel gegen die römische Flotte eingesetzt wurden.

Überlieferungs- und Wirkungsgeschichte

> Archimedes will be remembered when Aeschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not. 'Immortality' may be a silly word, but probably a mathematician has the best chance of whatever it may mean.
> G.H. Hardy*

Selbst wenn mathematische Ideen einen Hang zur Unsterblichkeit haben, auch sie müssen tradiert werden, um überleben zu können. Zumindest bei den archimedischen Schriften ist das nicht immer gelungen; schwer zu ermessen, wieviele Ideen zusammen mit den Schriften untergingen.

Bis Theon von Alexandria gab es in Alexandria eine gut organisierte Tradierung mathematischer Ideen und Schriften, von der auch das Werk des Archimedes profitierte. Nach Theons Tod wird dessen Tochter Hypatia die führende Mathematikerin am Museion. Derweil wird christlicher Fanatismus in Alexandria zunehmend zum Problem. 415 oder 416 n.Chr. wird Hypatia, von christlichem Mob gelyncht.

> Hypatia, die erste namentlich bekannte Mathematikerin, wurde Opfer eines Mordanschlages christlicher Fanatiker. Mit ihr erlosch die alexandrinische Schule der Mathematik.[174]

Ohne kompetente Mathematiker ist es schwierig, anspruchsvolle mathematische Ideen zu tradieren, geschweige denn sie fortzuentwickeln. Und nur wenige haben so viel Talent, dass sie keiner Ausbildung in der Mathematik bedürfen. Zudem war nicht nur die alexandrinische Schule der Mathematik dem Niedergang geweiht.

> Inzwischen war das Christentum nach dem Mailänder Edikt von 313 als Religion neben anderen geduldet und unter Kaiser Theodosius d. Gr. im Jahre 380 zur Staatsreligion im Römischen Weltreich geworden. Damit geriet die Pflege „heidnischer“ Ideen immer mehr in Widerspruch zum Totalitätsanspruch der christlichen Lehre. 529 wurde die Akademie [eine Neugründung der zwischenzeitlich nicht mehr fortgeführten platonischen Akademie; NF] auf Befehl des christlichen Kaisers Justinian als „Stätte heidnischer und verderbter Lehren“ gewaltsam geschlossen.[175]

Diese rabiate Politik führte zu einem antiken Brain-Drain.

> Viele Vertreter der griechisch-hellenistischen Wissenschaft waren wegen der Unduldsamkeit der christlichen Kirchen nach arabischen und indischen Ländern ausgewandert und führten dort die griechisch-hellenistische mathematische Tradition weiter. Sie wurde insbesondere zum Fundament der Mathematik in den Ländern des Islam. Diesem Umweg verdanken wir es, daß eine Vielzahl von mathematischen Ergebnissen der Antike vor dem Verlust gerettet worden ist.[176]

Von der Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks, die aller Wahrscheinlichkeit nach auf Archimedes zurückgeht, wissen wir in der Tat nur aus arabisch-sprachigen Quellen. Hier hat die Idee den Verlust der ursprünglichen Abhandlung überlebt. Im Vergleich zu anderen antiken Autoren spielt ansonsten die arabisch-sprachige Tradierung bei den archimedischen Arbeiten jedoch eine vergleichsweise geringe Rolle.

> Unabhängig davon dürfen die Wirkungen der archimedischen Arbeiten im islamischen Kulturraum und deren Bedeutung für die Mathematik nicht unterschätzt werden. Das Erbe der hellenistischen Mathematik wurde dort ja nicht einfach nur bewahrt, sondern erheblich weiter entwickelt. Dabei haben persische, usbekische und arabische Mathematiker die hellenistische Mathematik nicht nur einfach mit ein paar persischen und indischen Elementen angereichert, sondern haben deutliche Fortschritte bei der Ausgestaltung mathematischer Theorien erreicht. *Algebra* und *Algorithmus* haben nicht nur im etymologischen Sinn orientalische Wurzeln. (Übigens: Auch das heute übliche Dezimalsystem unter Einschluss der Ziffer 0 kam aus dem Osten und wurde vom lateinischen Europa nur zögerlich übernommen.)

---

* G.H.Hardy: An Annotated Mathematician's Apology. Lisbon 2019. S. 20.

174 Hans Wußing: 6000 Jahre Mathematik. Bd 1. Berlin, Heidelberg. Springer Verlag 2008. S. 211.

175 Hans Wußing: 6000 Jahre Mathematik. Bd 1. Berlin, Heidelberg. Springer Verlag 2008. S. 211.

176 Hans Wußing:Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Frankfurt am Main. Verlag Harri Deutsch 2008. S. 79. *Hinweis*: Für die Befruchtung des asiatischen Raums mit griechischer Mathematik spielten daneben auch die Ausbreitung griechischer Kultur in Folge des Alexander Feldzuges sowie die hellenistischen Großreiche eine Rolle.

Während das weströmische Reich verschiedene germanische Einwanderungs- und Eroberungswellen erlebte und dabei letztlich unterging,[177] blieb das oströmische Reich, zumindest mit seiner Metropole Konstantinopel (Byzanz), bis zur Eroberung durch die Osmanen (1453) ein Zentrum griechischer Kultur.
Spätestens beim Bau der Hagia Sophia bemerkte man dort, dass Mathematik und insbesondere Statik auch im Christentum nützlich sein können. Während im Bereich des ehemaligen weströmischen Reichs mindestens bis zum Jahr 1.000 das mathematische Bildungsniveau sich im dauerhaften Tiefflug befand, gelang es im Byzantinischen Reich immerhin, dem Schwund an mathematischen Wissen etwas Einhalt zu gebieten. Zumindest die wichtigsten Schriften der hellenistischen Mathematik blieben so erhalten.
Beim vierten Kreuzzug kam es allerdings zu einer vollständig absurden Eroberung von Konstantinopel durch christliche Kreuzritter. 1203 begann die Belagerung von Konstantinopel, das 1204 fiel. Bei der anschließenden Plünderung von Konstantinopel ging auch eine Vielzahl von Manuskripten in Flammen auf.
Man hat es den archimedischen Schriften also wahrlich nicht leicht gemacht, das lateinische Europa der Renaissance zu erreichen.

> Von den drei verschiedenen Wegen, auf denen die antike Wissenschaft schließlich in Westeuropa durchgedrungen ist und die man kurz als den byzantinischen, den arabischen und den lateinischen zu unterscheiden pflegt, ist im Falle Archimedes, anders als gewöhnlich, der erstgenannte der wichtigste gewesen. In Byzanz stellte im 9. Jahrhundert der Enzyklopädiker Leon von Thessalonika eine Handschrift zusammen, die alle ihm bekannten Werke des Archimedes enthielt und die der Archetypus aller Manuskripte geworden ist, aus denen vor 1906 der griechische Text hergestellt werden konnte. Diese Handschrift muß zusammen mit einer ebenfalls in Byzanz kompilierten Sammlung von griechischen Abhandlungen über Mechanik und Optik, in der auch archimedische Werke vorkamen, im 13. Jahrhundert in den Besitz des Hohenstaufenkaisers Friedrichs des Zweiten gekommen sein, der seinen Hof in Sizilien zu einem Zentrum für Künste und Wissenschaft gestaltet hatte. Im Jahre Jahre 1269 wurde ein großer Teil der in diesen beiden Kodizes gesammelten Abhandlungen vom Dominikaner Willemm van Moerbeke, dem bekannten Freunde des Thomas Aquinas, ins Lateinische übertragen. Es standen somit um die Mitte des 13. Jahrhunderts die wichtigsten Werke des Archimedes der lateinischen Christenwelt zur Verfügung; es ist aber keineswegs zu verwundern, daß sich vorläufig nicht der geringste Einfluß dieser neu erschlossenen Quelle griechischen Wissens auf die westeuropäische Mathematik oder Naturwissenschaft bemerkbar machte. Bei dem Tiefstand der europäischen mathematischen Bildung in diesen Zeiten, wo man erst anfing, die *Elemente* des Euklid zu studieren, müssen die tiefdringenden mathematischen Untersuchungen des Archimedes völlig unbegreiflich gewesen sein. Das wurde erst anders im 15. Jahrhundert, in dem der Mathematiker und Astronom Regiomontanus eine Archimedes-Handschrift erwarb und sogar eine gedruckte Ausgabe seiner Werke plante. Erst im 16. Jahrhundert aber ist die allgemeine mathematische Bildung weit genug fortgeschritten, um eine verbreitete Begierde nach einer Ausgabe zu erwecken. Im Jahre 1503 publizierte der neapolitanische Mathematiker Luca Gaurico lateinische Übersetzungen der *Kreismessung* und der *Parabelquadratur*. Diese wurden 1543 von Tartaglia aufs neue ins Licht gegeben unter Hinzufügung der Schrift über die schwimmenden Körper. Im nächsten Jahre, 1544, erschien die editio princeps von Thomas Gechauff Venatorius, die alle bekannten Werke des Archimedes auf griechisch und lateinisch und außerdem die wichtigsten Kommentare des Eutokios enthielt. Im selben Jahre publizierten die italienischen Mathematiker Commandino und Maurolyco, beide tüchtige Kenner der antiken Mathematik, lateinische Übersetzungen und gegen 1600 sind jedenfalls die führenden Mathematiker Europas im Stande, sich eine genaue Kenntnis der Archimedischen wissenschaftlichen Produktion zu erwerben.[178]

177 Der Machtanspruch des *Bischofs von Rom* überlebt den Untergang der Weltmacht Rom. Auch deswegen bleiben Schriftsystem, Sakral- und Wissenschaftssprache weiterhin Latein bzw. lateinischen Ursprungs. Und das sind nur die sichtbarsten Zeichen einer gemeinsamen kulturellen Grundprägung. Eine Gemeinsamkeit, die sich nicht zuletzt im gemeinsamen Kampf des lateinischen Europas gegen den Islam und dessen Eroberungswillen zeigt.

178 Dijksterhuis: Archimedes und seine Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft. In: Abhandlungen zur Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftslehre. Bremen. Carl Schünemann Verlag 1952. S. 27f.

Als man im lateinischen Europa anfängt die archimedischen Schriften ernsthaft zu studieren, kommt es zu einer kreativen Explosion in Mathematik und mathematisierter Wissenschaft. Einige wenige Beispiele sollen dies verdeutlichen.

Leonorda da Vinci (1452 – 1519) war stets auf der Suche nach Gelegenheiten, seine Kenntnisse der archimedischen Schriften zu vervollständigen. Und er war einer der ersten, für den es auch ganz selbstverständlich war, sich im Geiste von Archimedes um den weiteren Fortschritt der Wissenschaften zu bemühen. So arbeitete er z.B. an der Aufgabe, den Schwerpunkt des Tetraeders zu bestimmen.

> Leonardo versuchte auch die Schwerpunkte von dreidimensionalen Körpern zu bestimmen, immer mit den Methoden von Archimedes. Schließlich formulierte er ein Theorem zum Auffinden des Schwerpunkts in einem Tetraeder. Das war eine beachtliche Leistung und typisch für die Art, in der die Gelehrten der Renaissance auf den Arbeiten von Archimedes aufbauten.[179]

Ernst Mach wurde von Leonardo vor allem dadurch beeindruckt, dass er auf der Basis seiner Auseinandersetzung mit der archimedischen Mechanik quasi „potentielle Hebel“ auch dort erkennen konnte, wo es gar keine realen Hebel gab und so Gleichgewichtsbedingungen für Konstellationen benennen konnte, für deren Analyse wir heute in der Physik sogenannte Momente (Vektorprodukte aus Kraftvektoren und dazu orthogonalen Ortsvektoren) verwenden.

> Leonardo da Vinci (1452 – 1519), der berühmte Maler und Forscher, scheint einer der ersten gewesen zu sein, der die Wichtigkeit des allgemeinen Begriffs der sogenannten statischen Momente gekannt hat.[180]

Das Beispiel dazu: Gegeben sei eine Stange, die mit dem einen Ende an ihrem Drehpunkt A fixiert ist. Am anderen Ende seien zwei Seile fixiert. Am ersten, frei fallenden Seil 1 sei ein Gewicht P befestigt. Das zweite Seil werde über eine Rolle seitlich weggeführt, bevor es frei fallen kann. Am zweiten Seil sei ein Gewicht Q angehängt. Wann ist ein so ein System wie im Schaubild 23 skizziert im Gleichgewicht und bleibt stabil in dieser Lage? Unter welchen Voraussetzungen bleibt das Seil 2 so, dass es horizontal auf die Umlenkrolle zu läuft?

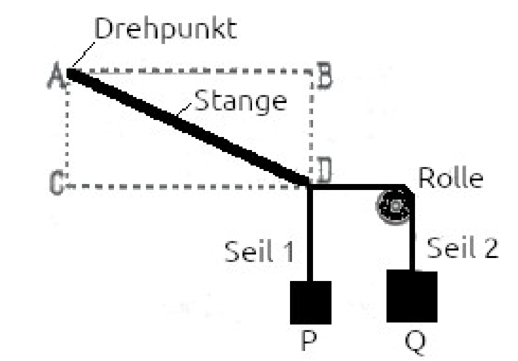

Schaubild 23: Skizze ähnlich einer Leonardo Skizze in seinem Tagebuch

Leonardo da Vinci kannte die Antwort:

$$P:Q = \overline{AC}:\overline{AB}$$

so lautet (unter den üblichen Idealisierungen) die Gleichgewichtsbedingung für die skizzierte Situation.

Hier in den Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ „potentielle“ oder auch „virtuelle“ Hebel zu erkennen, die falls sie die gleiche Proportion wie die Gewichte P und Q aufweisen, zu einem Gleichgewichtszustand führen, ist in der Tat ein großer Schritt auf dem Weg zu einem Denken in statischen Momenten.

Simon Stevin (1548 – 1620) hat nicht nur einen wichtigen Beitrag zur Erschließung der archimedischen Schriften zur Hydrostatik geleistet,[181] sondern war auch in der Lage, das in der archimedischen Hydrostatik permanent praktizierte Denken in Gleichgewichtsbedingungen höchst kreativ und nutzbringend zur Klärung mechanischer Probleme einzusetzen. Von ihm stammt das schon in der Einleitung erwähnte Stevinsche Gedankenexperiment, das einen wichtigen Beitrag zur Klärung der Physik der schiefen Ebene leistete (siehe Schaubild 24).

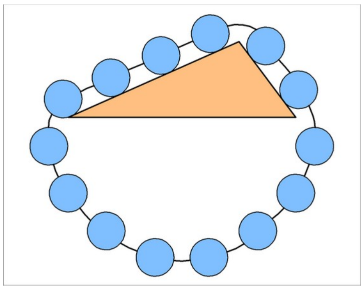
Schaubild 24: Das Stevinsche Gedankenexperiment

> Auf einem Dreieck mit zwei schiefen Ebenen verschiedener Neigung liegt eine geschlossene Kugelkette. Die Erfahrung lehrt, dass die Kette nicht von selbst rotiert, wenn sie nicht angestoßen

179 Reviel Netz & William Noel: Der Kodex des Archimedes. München. dtv 2010. S. 124.

180 Ernst Mach: Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Frankfurt. Minerva 1982. S. 21.

181 Stevin hat dabei – zumindest in einem Punkt – die archimedische Hydrostatik gleich weiterentwickelt.

> wird. Andernfalls wäre die Vorrichtung ein Perpetuum mobile, das Stevin unmöglich erschien und nach heutiger Auffassung aufgrund der Energieerhaltung ausgeschlossen ist. Da der untere Teil der Kette symmetrisch unter dem Dreieck hängt, kann dieser entfernt werden, ohne das Gleichgewicht der verbleibenden Kette zu stören. Daraus folgt direkt, dass sich die Gewichte der Ketten auf den beiden schiefen Ebenen genauso verhalten wie die Längen der beiden Seiten. Außerdem folgt, dass die beiden Kräfte nach rechts und nach links im Scheitelpunkt der Kette vom Betrag gleich sind.[182]

Ein berühmter Kollege von *Stevin* hat nicht nur den freien Fall untersucht, sondern ebenfalls (und in engstem Zusammenhang mit dem Thema *feier Fall*) auch zu schiefen Ebenen gearbeitet: Galileo Galilei (1564 – 1642). Sein Alterswerk – auf Grund des von der Inquisition verhängten Urteils in häuslicher Haft verfasst – gilt als eines der Schlüsselwerke der Physikgeschichte:

> Ab 1633 hatte sich Galilei an sein physikalisch-mathematisches Hauptwerk gemacht: *Discorsi e Dimonstrazioni Matematiche intorno a due nuove science attenti alla meccanica e i movimenti locali* (Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die örtlichen Bewegungen betreffend) (…).(…) Der Text begründet die moderne Physik, die Newton dann in seiner *Principia* ausbilden wird. (…) Galileo Galilei stirbt am 8. Januar 1642. Ein prunkvolles Begräbnis wurde durch den Vatikan verhindert.[183]

> Dieses Buch [Discorsi e Dimonstrazioni; NF] erschien im Jahr 1638, zu einem Zeitpunkt, als Archimedes bereits 1850 Jahre tot war, eine ganz schön lange Zeitspanne. Und trotzdem bezieht sich Galilei ständig auf Archimedes. Im Wesentlichen behandelt Galilei die beiden Wissenschaften der Statik (Wie verhalten sich Körper in Ruhe?) und der Dynamik (Wie verhalten sich Körper in Bewegung?). Für die Statik verwendet Galilei hauptsächlich den *Schwerpunkt* und das *Gleichgewichtsgesetz* [Hebelgesetz; NF]. Beide Konzepte übernimmt er von Archimedes – explizit und immer mit dem Ausdruck der Bewunderung. Für die Dynamik verwendet Galilei hauptsächlich die *Approximation von Kurven* und die *Verhältnisse von Zeit und Bewegung*, beides wiederum direkt von Archimedes entlehnt. Keine andere Autorität wird ähnlich oft oder mit vergleichbarer Hochachtung zitiert. Im Wesentlichen hat Galilei dort begonnen, wo Archimedes aufgehört hatte, und er hat sich genau in die Richtung bewegt, die sein Vorgänger vorgegeben hatte.[184]

> Es steht außer Frage: Galileis *Discorsi* von 1638 sind die Grundlage der *Principia* Newtons und die Gründungsurkunde der neuzeitlichen Naturwissenschaft.[185]

Aber nicht Galilei sondern Johannes Kepler (1571 – 1630) gelang die Enthüllung der Planetengesetze. Für diese Aufgabe waren sicherlich die Texte von Apollonios zu den Kegelschnitten (Ellipsen!) entscheidender als die Schriften von Archimedes. Keplers Arbeit zur Fassregel beginnt hingegen mit einem (etwas ungenauen) Rückgriff auf Archimedes.
Es ist überhaupt schwierig, einen berühmten Mathematiker aus dieser Zeit zu finden, der nicht auf die eine oder andere Weise durch Archimedes beeinflusst wurde. Es sollen hier nur noch zwei spezielle Punkte herausgehoben werden:

- Eine Vielzahl an Mathematikern, darunter *Simon Stevin* und *Gottfried Wilhelm Leibniz*, haben sich damals mit der Bestimmung von Schwerpunkten beschäftigt:

  > In der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts entsteht eine Kultur der Schwerpunktbestimmung, die durch die Verehrung der Arbeit Über das Gleichgewicht ebener Flächen (…) angeregt wird. Dabei richtet sich das Interesse [vorwiegend; NF] auf die Schwerpunktsberechnung von Körpern, da von Archimedes auf diesem Gebiet nur wenig überliefert ist.[186]

- Eine Vielzahl an Mathematikern suchte nach Möglichkeiten, es in puncto Bestimmung krumm begrenzter Flächen oder Volumina Archimedes gleichzutun, aber ohne *doppelte reductio ad absurdum* Beweise führen zu müssen, die ja meist nur im Rahmen komplizierter geometrischer Beweisgänge möglich sind.

---

182 Wikipedia Artikel: https://de.wikipedia.org/wiki/Stevinsches_Gedankenexperiment Stand: 7.9.2022.
183 Thomas Sonar: 3000 Jahre Analysis. Berlin, Heidelberg. Springer 2011. S. 202f.
184 Reviel Netz & William Noel: Der Kodex des Archimedes. München. dtv 2010. S. 30f.
185 Ed Dellian in Galileo Galilei: Discorsi, (herausgegeben von Ed Dellian). Hamburg. Meiner Verlag 2015. S.VII
186 Thomas Sonar: 3000 Jahre Analysis. Berlin, Heidelberg. Springer 2011. S. 162.

Ein wichtiger Teil der ideengeschichtlichen Wirkung der archimedischen Schriften besteht tatsächlich darin, zur Suche nach einfacheren Möglichkeiten für Flächen- und Volumenbestimmungen anzuspornen. Dass Archimedes es mit seiner Art der strengen Beweisführung übertreibt, wird dabei häufig und überaus deutlich ausgesprochen.
Auch bei diesem Punkt der Reaktion auf die archimedischen Schriften ist erneut *Simon Stevin* als einer der wichtigsten Akteure zu nennen. Des weiteren haben sich auch *Johannes Keple*r und *Paul Guldin* (1577 – 1643) mit dem Thema „Beweisvereinfachung" beschäftigt.[187] Der besondere Ansatz von *Cavalieri* wurde bereits im Einleitungszitat zum Abschnitt *Quadratur der Parabel* gestreift. Auf die Auflistung weiterer Namen soll hier verzichtet werden. Häufig wurden solche Ansätze unter Heranziehung eines Konzepts von Indivisiblen gerechtfertigt.[188]

Solche Ansätze kann man dabei durchaus als Vorläufer und/oder Wegbereiter der frühen Analysis – wie sie von Isaac Newton (1642 – 1726) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) erschaffen wurde – begreifen. Viele Ideen dieser Vorläufer wurden (in der ein oder anderen Form) in die Analysis integriert. Und so kennt man z.B. noch immer das *Prinzip von Cavalieri*.

Nach der Entwicklung der Analysis durch *Newton* und *Leibniz* geriet die besondere Rolle die die Wiederentdeckung der archimedischen Arbeiten für das Bemühen um effizientere mathematische Methoden zur Flächen- und Volumenbestimmung spielte, schnell in Vergessenheit.

Ähnlich sieht es bei der Mechanik aus. Nachdem es in *Newtons Principia* gelang die scholastische tradierte, aristotelische Teilung in himmlisch und irdisch auf höchst beeindruckende Weise zu überwinden und *Galileis Fallgesetz* wie *Keplers Planetengesetze* in einen gemeinsamen Bezugsrahmen einzubinden, ist schnell vergessen worden, wie viele entscheidende Impulse die moderne Physik Archimedes verdankt. Letzteres auch deswegen, weil die ehemals geometrischen Herleitungen in der Physik bald immer mehr durch mathematische Techniken der Analysis ersetzt wurden.

Newton selbst kann man aber wohl nicht vorwerfen, jene Wurzeln, die erst die Fortschritte der neuen Art der Naturphilosophie ermöglichten, vergessen zu haben. Es wäre doch sehr verblüffend, wenn er beim berühmten Newton-Zitat "If I have seen further it is by standing on ye sholders of Giants" Archimedes bei den Riesen auf deren Schultern er stand, nicht mitgemeint hätte.

In Renaissance und zu Beginn der Neuzeit vermittelten die Arbeiten von Archimedes einen grundlegend neuen Zugang zur Mechanik. Archimedische Mechanik hat nichts mit erstarrter Scholastik zu tun. Allein das machte den archimedischen Ansatz schon attraktiv. Und dann lieferte er auch noch eine funktionierende Wissenschaft. Eine, in der, wie sich zeigte, man zudem auch noch schnell Fortschritte erzielen konnte.

In dem man sich Archimedes als wissenschaftlicher *Leitfigur* zuwandte, wandte man sich den Methoden der mathematisierten Wissenschaft zu. Aus dieser Zuwendung zu mathematisierter Wissenschaft entspringt ein neues *Leitbild*: Galilei stellt es in seinem späten Hauptwerk *Discorsi e Dimonstrazioni* vor. Ein neues *Leitbild,* das in der europäischen Kultur ein zentraler Orientierungspunkt für klugen Verstandesgebrauch wird.

Es geht hier um nicht weniger als um eine der Kernprägungen der westlichen Kultur und Zivilisation.

---

187 Einen ersten Einblick in deren Bemühungen zur Erweiterung der in der Mathematik zulässigen Beweismethoden gibt *Eberhard Knobloch: Archimedes, Kepler und Guldin – Zur Rolle von Beweis und Analogie* in *Volker Peckhaus (Hrsg.): Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik. München, Paderborn. Fink Verlag 2005*. *Hinweis*: Die dort vertretene Auffassung, dass Archimedes bei seinen mechanischen Herleitungen einem Denken in Indivisiblen anhing, muss man nicht unbedingt teilen. Dieser Punkt ist aber auch für den sonstigen Inhalt des Aufsatzes nicht besonders erheblich.

188 Vgl. im Bedarfsfall: Thomas Sonar: 3000 Jahre Analysis. Berlin, Heidelberg. Springer 2011. S. 208ff.

Archimedes als kulturprägende Schlüsselfigur

Wenn es um den Einfluss griechischer Mathematiker auf die intellektuelle Neuorientierung im lateinischen Europa während Renaissance und Neuzeit geht, dann sind - vor allen anderen - drei Namen einschlägig:

Euklid, Archimedes und Apollonios.

Euklids *Elemente* vermittelten den Zugang zu beweisender Mathematik bis hin zu axiomatischer Theoriebildung sowie geometrisches Grundwissen und stimulierten allerlei Versuche axiomatisch deduktives Denken auch in Bereichen deutlich jenseits der Mathematik heimisch zu machen.

Apollonios *Konika* lieferten das mathematische Detailwissen zu Ellipsen und Parabeln, das nutzbringend zum Verständnis der Planetengesetze (Kepler) und des schiefen Wurfs (Galilei) eingesetzt werden konnte.

Archimedes, der chronologisch zwischen Euklid und Apollonios liegt, belegte mit seinen Arbeiten, dass man vor den mathematischen Herausforderungen krumm begrenzter Figuren und Körper keineswegs kapitulieren muss. Das stimulierte eine Vielzahl von Reaktionen, die letztlich in die Erschaffung der Analysis durch Newton und Leibniz mündeten. Etliche Grundgedanken dieser neuen mathematischen Disziplin hatte Archimedes bereits als heuristisches Hilfsmittel benutzt, was jedoch in Renaissance und Neuzeit unbekannt war. Zudem ist Archimedes die zentrale antike Leitfigur bei der Hausbildung des Leitbildes der mathematisierten Wissenschaft. Seine Arbeiten zur Hydrostatik und mehr noch jene zur Mechanik befördern einen Umbruch des Denkens. Galileis *Discorsi* und Newtons *Principia* sind die Mark- und Meilensteine dieses Umbruchs.

Archimedes verkörpert als antikes Genie bereits fünf zentrale Grundüberzeugungen und Eckpfeiler der westlichen Verstandeskultur:

- Mathematische Beweise und nicht Tradition oder Religion liefern die sichersten Menschen zugänglichen Einsichten;
- Mathematisierte Wissenschaften und nicht die Deutungen der Tradition oder Religion liefern die profundesten Erkenntnisse über die Welt;
- Ingenieursmäßig betriebene Entwicklung von Technik, die *auch* das Wissen der mathematisierten Wissenschaften nutzt, liefert überlegene Problemlösungen;
- Bei allem Vorwärtstreben des Denkens muss man Vorsicht und Umsicht walten lassen und sich eine strenge Selbstdisziplin beim Verwenden delikater Methoden auferlegen, um nicht den Boden des klugen Verstandesgebrauchs zu verlassen;
- Der denkende Mensch hat das Recht, sich ein eigenes Urteil zu bilden.

Diese Formulierungen sind bewusst so gewählt, dass sie die gesellschaftliche Brisanz dieser Denkkultur unterstreichen. Eine Brisanz, die Galilei sehr unmittelbar zu spüren bekam. Eine Brisanz die sich auch in der engen Verzahnung von neuen Wissenschaften und der Kultur der Aufklärung zeigt.

Angesichts dieser Sachlage wäre es wohl angemessen, wenn Archimedes auch heute noch als Schlüsselfigur der westlichen Kultur betrachtet würde. Die archimedischen Arbeiten bzw. deren Rezeption in der Renaissance werden aber keineswegs durchgängig als kultur- bzw. zivilisationsprägend anerkannt:

In Winklers *Geschichte des Westens* tauchen auch zweit- bis drittklassige Geistesgrößen auf, aber ein Eintrag *Archimedes* fehlt im Register (Bd 1, 2. Aufl.). *Platon* hat 11 Einträge.

Und der von etlichen Feuilletonisten noch immer als wichtigster deutschsprachiger Denker gefeierte Habermas meint in seinem Werk *Auch eine Geschichte der Philosophie* den Weg vom Glauben zum Wissen in der abendländischen Kultur erfassen zu können, ohne überhaupt auf die Erfindung der beweisenden Mathematik in der griechischen Antike zu sprechen zu kommen. Nun, viele hassen die Anstrengungen mathematischen Denkens und so finden solche Werke leichter ihr Publikum als mit Mathematik belastetes Schrifttum. Da haben die Verleger schon recht.

Nachbemerkung

Dieses Papier wurde länger bebrütet als jeder andere Text auf www.antike-griechische.de. Von Anfang an war es das Ziel, einerseits einen Text zu verfassen, der mehr Informationen und tiefere Einblicke liefert als Stratherns Bändchen *Archimedes & der Hebel*, der aber dennoch binnen ein paar Stunden gelesen werden kann und keine Tage oder gar Wochen intensiven Durcharbeitens erfordert, um vollständig erfasst zu werden.

Diese Zielsetzung machte es natürlich notwendig, in der Mehrzahl der Fälle auf eine ausführliche Präsentation der Beweisgänge zu verzichten. Was die Details der archimedischen Beweisgänge angeht, so werden diese fast durchgängig unterschlagen.[189] Der Text begnügt sich meist mit ein paar Hinweisen zur Beweisstrategie.

Wenn die hier bevorzugte Vogelperspektive verlassen wird, dann stets, weil sich eine Gelegenheit bietet, um an einem besonders einfachen Beispiel typische Merkmale des archimedischen Vorgehens zu erläutern. Was man in diesem Papier häufiger findet als Einblicke in die Details der Beweisgänge, sind anschauliche Zugänge zu den von Archimedes benutzten Konzepten der Näherung. Es sind nicht zuletzt diese Konzepte der Näherung, mit denen Archimedes auf die Herausbildung der Analysis Einfluss nahm.

Insgesamt wurde versucht, das mathematische Anspruchsniveau in einem Rahmen zu halten, der mit der Idee von *gehobener Allgemeinbildung* noch verträglich ist. Trotzdem wird ein Leser, der mathematisches Beweisen nur vom Hörensagen kennt, mit diesem Text deutlich größere Schwierigkeiten haben, als mit anderen Papieren auf www.antike-griechische.de.

Es wurde Wert darauf gelegt den Problemen im Umfeld des Beweises/Scheinbeweises des Hebelgesetzes wie den Eigentümlichkeiten der mechanisch eingefärbten Beweistechnik (die von Archimedes keineswegs nur heuristisch benutzt wird) angemessenen Raum einzuräumen.

Zugleich sollte aber auch deutlich unterstrichen werden, wie groß und segensreich der Einfluss gerade der archimedischen Mechanik in Renaissance und Neuzeit war.

Der Leser wird unschwer erkennen, dass ich gelegentlich auf Texte anderer Autoren mit Kopfschütteln reagiert habe. Manches von dem, was zu Archimedes publiziert wird, halte ich nicht nur für schlicht falsch, sondern für akademisch eingekleideten groben Unsinn.

Noch ärgerlicher als solcher Unsinn ist die in den Geistes- wie Geschichtswissenschaften gängige, sich gern hochgebildet gebende Ignoranz der kultur- und zivilisationsprägenden Kraft der beweisenden Mathematik bzw. mathematisierten Wissenschaften.[190]

Wer jetzt ein paar pathetische Äußerungen erwartet, derart, dass dieser Text versucht, derartiger Ignoranz nach Kräften entgegen zu wirken, den muss ich enttäuschen. An der Spaltung in zwei Kulturen (C.P. Snow) lässt sich meines Erachtens nichts mehr ändern.

Die Motivlage hinter der Produktion dieses Papiers ist einfacher und wenn man so will auch narzisstischer:
Ich habe in meinem 70zigsten Lebensjahr einen Text fertig gestellt, bei dem ich davon überzeugt bin, dass ich ihn in meinem 20zigsten Lebensjahr mit erheblichem Genuss und Gewinn gelesen hätte. Das verschafft mir eine überaus angenehme Befriedigung.

Aber natürlich gibt es (jenseits dieses Irrealis) auch die Idee, dass es vielleicht noch weitere Leser gibt, die Genuss und/oder Gewinn aus diesem Text ziehen können.

In diesem Sinne

N.F.

ps: panta rhei: alles fließt und manches geht dabei den Bach runter.

189 Allerdings werden ersatzweise vielzählige Hinweise zu einschlägiger Literatur in den Fußnoten gegeben.

190 Ich habe ein paar Vermutungen zu den Ursachen der von etlichen Autoren diesbezüglich gepflegten Ignoranz, aber deren Äußerung könnte als grob unhöflich gewertet werden und so schweige ich dazu lieber.

Anhang

Abbildungen

Das Titelbild zeigt ein mittelalterliches Idealporträt von Archimedes (Ursprung unklar). Dieses wurde dem Wikimedia Commons Archiv entnommen und ist gemeinfrei.

Die Abbildung 2 auf Seite 12 ist eine Bearbeitung der dem Wikimedia Commons Archiv entnommenen Abbildung *Archimedes pi.svg* von Fredrik sowie Leszek Krupinski und ist gemeinfrei.

Die Abbildung 4 auf Seite 16 ist eine Bearbeitung der dem Wikimedia Commons Archiv entnommenen Abbildung A*rchimedean spiral.png* von AnonMoos und ist gemeinfrei.

Die Abbildung 7 auf Seite 19 ist eine Bearbeitung der dem Wikimedia Commons Archiv entnommenen Abbildung *Archimedean spiral circle squaring triangle.svg* von Kmhkmh und unterliegt der Creative Commons Attribution 4.0 International Lizenz.

Die Abbildung 10 auf Seite 25 ist eine Bearbeitung der dem Wikimedia Commons Archiv entnommenen Abbildung *Cicero entdeckt das Grabmal des Archimedes (Zuccarelli).jpg* und ist gemeinfrei.

Die Abbildung 12 auf Seite 27 ist eine Bearbeitung der dem Wikimedia Commons Archiv entnommenen Abbildung *01-Volumenvergleich Kugel – Zylinder.svg* von Petrus3743 und unterliegt der Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International Lizenz.

Die Abbildung 14 auf Seite 29 wurde von Claude (Anthropic) erstellt und ist gemeinfrei.

Die Abbildung 16 auf Seite 32 ist eine Bearbeitung der dem Wikimedia Commons Archiv entnommenen Abbildung *01-Schwerpunkt im Dreieck-2.svg* von Petrus3743 und unterliegt der Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International Lizenz.

Die Abbildung 17 auf Seite 38 ist eine Bearbeitung der dem Wikimedia Commons Archiv entnommenen Abbildung A*rchimedes lever (Small).jpg* und ist gemeinfrei.

Die Abbildung 19 auf Seite 43 ist eine Bearbeitung der dem Wikimedia Commons Archiv entnommenen Abbildung *Conic Sections de.svg* von Antonsusi und unterliegt der Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported Lizenz.

Die Abbildung 21 auf Seite 45 wurde *Archimedes: Werke. Darmstadt. WBG 1983. S.157* entnommen und ist in Ermangelung einer nennenswerten Schaffenshöhe gemeinfrei.

Die Abbildung 24 auf Seite 63 ist eine Bearbeitung der dem Wikimedia Commons Archiv entnommenen Abbildung *Stevinsches.Gedankenexperiment.png* von Bautsch, der ein **unentgeltliches, bedingungsloses Nutzungsrecht für jedermann ohne zeitliche, räumliche und inhaltliche Beschränkung,** eingeräumt hat.

Alle anderen Abbildungen wurden selbst erstellt und sind gemeinfrei.

Empfehlungen

Bücher

Günter Aumann: Archimedes - Mathematik in bewegten Zeiten

Trotz kleinerer Schwächen: Die beste deutschsprachige Erschließung der archimedischen Mathematik (keine klassische Übersetzung). Dieses Papier hat dem Aumann Buch viel zu verdanken.

Sir Thomas Heath (editor): The Works of Archimedes

Eine etwas ältere, aber immer noch gern benutzte, für den modernen Leser sehr gut zugängliche Übersetzung (englisch). Der Übersetzung vorgeschaltet ist eine ausführliche, überaus informative Einleitung.

Zur Literaturliste (Literaturempfehlungen) auf www.antike-griechische.de.

Links

Thomas Heath: Archimedes' Werke (PDF) (deutsch – Übersetzer aus dem Englischen: Fritz Kliem)

Die klassische Übersetzung von Heath ins Deutsche übertragen.

Thomas Heath: A History of Greek Mathematics, Volume 2 (PDF)

Ein Überblick über die griechische Mathematik von Aristarchos bis Diophantos mit ca. 90 Seiten zu Archimedes (englisch).

Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik (PDF)

Vorlesungsskript von D. Gronau zur Geschichte der Mathematik (Uni Graz): Ein Überblick von den ägyptischen und babylonischen Anfängen bis hin zu Newton und Leibniz (106 S., PDF-Dokument).

Jens Høyrup: Archimedism, not Platonism: on a malleable ideology of renaissance mathematicians (1400 to 1600), and on its role in the formation of seventeenth century philosophies of science (PDF).

Ein Manuskript (aus 1990), das einen Beitrag zur Korrektur der gängigen Unterbewertung der ideengeschichtlichen Bedeutung von Archimedes leistet (englisch). Der Text erschien in *Archimede: Mito Tradizione Scienza* (1992): 81-110.