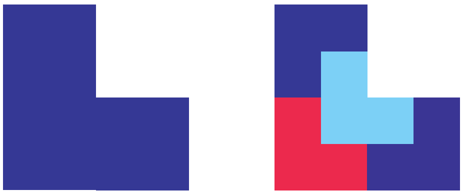
Paver des pavés



Les fascinants problèmes géométriques posés par les autopavés sont l'objet de recherches assidues.

Demandez à vos amis de partager la figure à gauche ci-dessus en quatre figures superposables. Il n'est pas sûr qu'ils trouvent immédiatement la réponse donnée à droite. Et pourtant, elle est facile… après-coup ! Une propriété supplémentaire est que chaque morceau est semblable au tout. Ce genre d'énigme est plaisant, car la géométrie du plan est la plus intuitive et, pour certains, la plus plaisante des disciplines mathématiques : on y manipule des objets par la pensée et les résultats expriment des vérités concernant tout être humain.

Le découpage d'une figure en figures semblables plus petites est un domaine de la géométrie du plan où confluent toutes sortes de mathématiques : certains résultats sont énoncés et démontrés à l'aide de petits dessins, d'autres ne peuvent être découverts qu'avec l'aide de l'ordinateur, d'autres encore résultent de techniques mathématiques avancées.

Tout triangle peut être découpé en quatre triangles semblables entre eux qui sont quatre copies à l'échelle 1/2 du triangle de départ : ce découpage s'obtient en joignant les milieux des côtés deux à deux *(figure 1a)*. Plus généralement tout triangle peut être découpé en n^2 triangles semblables au triangle de départ : on dessine 3 réseaux de $n - 1$ lignes régulièrement espacées et parallèles aux côtés *(figure 1b)*. Ainsi l'on dira qu'un triangle est un autopavé : il peut être pavé par des copies plus petites de lui-même.

Les figures du plan susceptibles d'être pavées par des copies plus petites d'elles-mêmes – ces autopavés – sont-elles nombreuses ? Les connaît-on bien ? Sait-on en établir une classification systématique ? En dépit de nombreux travaux, les réponses à ces questions simples et naturelles ne sont pas toutes connues. Le domaine semble d'une richesse inespérée puisqu'en plus des figures de la géométrie classique s'introduisent des fractales (on pouvait y penser car, dans les fractales, la partie est semblable au tout), et que des questions en apparence élémentaires n'y sont pas résolues.

Il y a deux sortes d'autopavés *(a)* ceux pour lesquels les copies utilisées sont de même taille, on les nomme réguliers, et *(b)* ceux où les copies pavantes sont de tailles différentes et qui sont, bien sûr, qualifiés d'irréguliers. Notons que, sauf indication contraire, il est interdit de retourner les pièces des pavages : nous n'acceptons pas les symétries et les pièces doivent se déduire les unes des autres par translation, rotation et homothétie (changement de taille).

Pour plus de précision, on désigne parfois le nombre de pavés utilisés dans le découpage : on dira ainsi que tout triangle est un 4-autopavé régulier (et aussi un n^2-autopavé régulier). On envisagera le cas des pavages infinis (des ∞-autopavés) ; ceux-ci – réfléchissez une seconde – sont nécessairement irréguliers. Signalons aussi que les mots reptile et irreptile sont parfois employés en français et en anglais à la place d'autopavé régulier et d'autopavé irrégulier, et que c'est eux que vous devez utiliser pour faire vos recherches sur Internet.

Premières questions

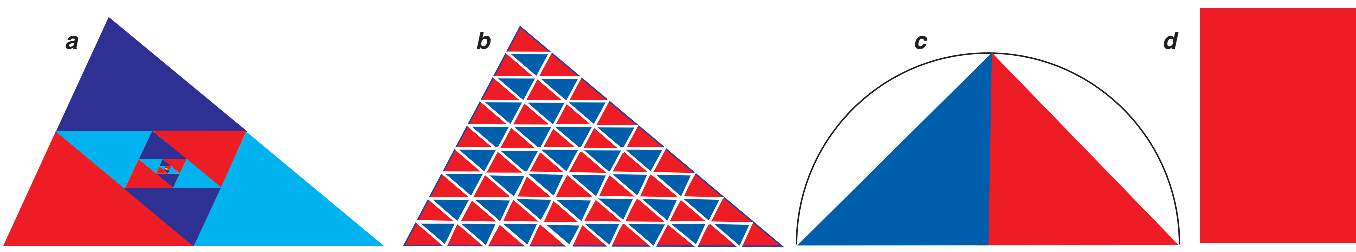
Pour vous mettre dans le bain, amusez-vous à prouver par le raisonnement ou à l'aide de petits dessins les affirmations suivantes : certaines réponses sont données sur la figure 1.

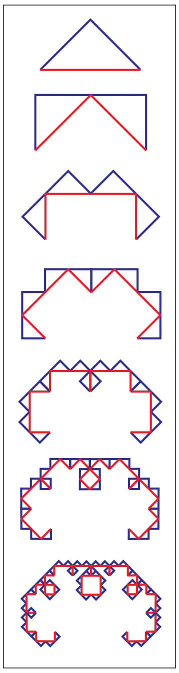
a. Tout triangle rectangle est un 2-autopavé, un 3-autopavé, un 4-autopavé, etc.

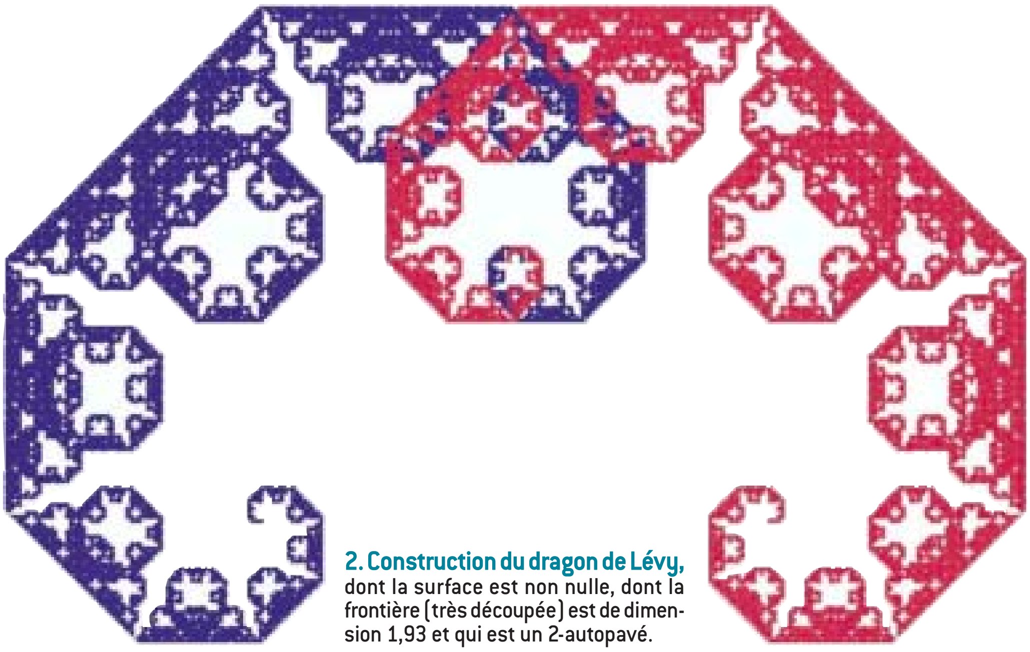
b. Si une figure est un n-autopavé (n entier plus grand que 1) alors c'est aussi un $(2n - 1)$- autopavé (un 5-autopavé est donc nécessairement un 9-autopavé).

c. Si une figure est un n-autopavé régulier (n entier plus grand que 1) alors c'est aussi un n^2-autopavé régulier.

1. Autopavage régulier d'un triangle *(a)* quelconque en 4 triangles et continuation du processus. Autopavage régulier en n^2 triangles *(b)* par $n - 1$ parallèles aux côtés. Les jumeaux magiques *(c)* d'un triangle rectangle isocèle et d'un rectangle *(d)* de côtés 1 et $\sqrt{2}$. Autopavage régulier d'un rectangle en n rectangles *(e)*. Autopavage fini *(f)* et infini *(g)* utilisant les propriétés d'un triangle rectangle.







2. Construction du dragon de Lévy, dont la surface est non nulle, dont la frontière (très découpée) est de dimension 1,93 et qui est un 2-autopavé.

d. Pour tout entier *n* plus grand que 1, il existe une figure qui est un *n*-autopavé régulier d'ordre *n*.

e. Tout triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit ont pour longueurs *a* et *b* (*a* et *b* entiers) est un $(a^2 + b^2)$- autopavé régulier. Le triangle rectangle de côtés 2, 3, $\sqrt{13}$ est, par exemple, un 13-autopavé régulier.

Le problème des autopavés illustre magnifiquement l'idée que l'infini est souvent une facilité que se donne le mathématicien quand il est gêné avec le fini : incapable de rester dans le vrai du fini, le théoricien se console avec l'infini.

En effet, la question de savoir si une forme donnée est un autopavé est très facilement résolue lorsqu'on accepte les autopavages infinis : toute forme raisonnable pouvant servir de pavé *(voir la définition mathématique de pavé dans l'encadré de la page suivante),* même si sa frontière est fractale, et même si elle n'est pas d'un seul tenant, peut être pavée par une infinité de copies d'elle-même. Ces autopavages infinis ne sont d'ailleurs jamais uniques : pour chaque pavé donné, il existe une infinité d'autopavages différents.

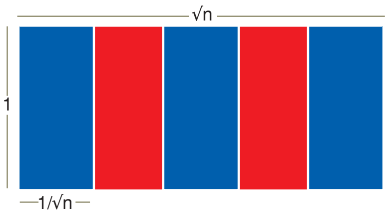
Puisque toute forme pouvant servir de pavé est un ∞- autopavé, les choses intéressantes ne commencent que lorsqu'on veut paver une forme avec un nombre fini de copies d'elle-même. Et là, il est clair que tout n'est pas possible : un disque par exemple ne peut pas être pavé par un nombre fini de disques. La première surprise provient du cas le plus simple : les découpages parfaits en deux, c'est-à-dire les 2-autopavés réguliers.

Six, pas un de plus !

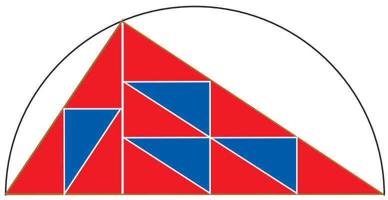
Chacun sait qu'il y a cinq solides platoniciens (polyèdres convexes ayant pour faces des polygones réguliers identiques et dont tous les angles sont équivalents) qui sont : *(a)* le tétraèdre régulier (quatre triangles équilatéraux) ; *(b)* le cube (six carrés) ; *(c)* l'octaèdre régulier (huit triangles équilatéraux) ; *(d)* le dodécaèdre régulier (douze pentagones réguliers) et *(e)* l'icosaèdre régulier (vingt triangles équilatéraux). Il y cinq solides platoniciens, pas un de plus. Même si la démonstration complète qu'aucun autre n'est possible est difficile, chacun perçoit la beauté de ce résultat qui fascinait les Grecs au point qu'ils attribuèrent une importance symbolique à ces 5 formes géométriques parfaites.

Assez étrangement, un résultat d'une beauté équivalente vient d'être découvert par des mathématiciens de la *School*

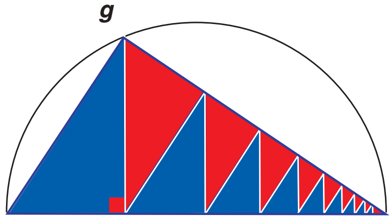
e



f



g



of Mathematics du Georgia Institute of Technology à Atlanta aux États-Unis. Sze-Man Ngai, Victor Sirvent, J.J.P. Veerman et Yang Wang ont établi (à un détail près comme nous allons le voir) qu'il n'existe que six formes géométriques qui soient des 2-autopavés réguliers. Essayez de découvrir vous-même quelques-unes de ces six formes sécables en deux parties identiques semblables au tout.

Le travail des mathématiciens d'Atlanta est assez technique et utilise la théorie des corps de nombres qui trouve là une belle application en géométrie plane. À vrai dire, leur démonstration n'est pas tout à fait complète, car elle s'appuie sur une conjecture dont personne ne doute de la validité, mais qui pour l'instant n'a pas été prouvée. Cette conjecture affirme que : *Tout* n*-autopavé régulier est rationnel,* c'est-à-dire est tel que les angles mutuels entre les pavés du découpage sont de la forme $p\pi/q$, où p et q sont des nombres entiers.

Le fait que tous les n-autopavés réguliers (n entier plus grand que 1) connus aujourd'hui soient des autopavés rationnels, suggère fortement que la conjecture soit vraie et donc que la liste des six 2-autopavés réguliers proposée par les chercheurs d'Atlanta est exhaustive. Nous sommes dans la même situation que Platon, qui connaissait les 5 polyèdres réguliers et qui n'avait pas prouvé qu'il n'en existait pas de sixième, mais en était sans doute intimement persuadé.

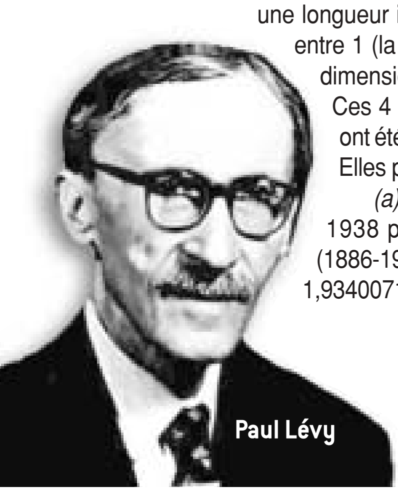
Étant donné la beauté et la simplicité du concept de 2-autopavé régulier, je propose de nommer ces figures des jumeaux magiques. Il y a donc 5 solides platoniciens et 6 jumeaux magiques.

Les jumeaux magiques

Par définition, les jumeaux magiques peuvent être découpés en deux parties identiques et semblables toutes deux à la figure de départ. La surface de chaque moitié est donc la moitié de la surface du tout, et la taille des pièces est donc dans un rapport de $\sqrt{2}/2$ avec le tout.

Dans le résultat de Ngai-Sirvent-Veerman-Wang, ce qui étonne le plus c'est l'étrangeté de certains des 6 jumeaux magiques. Parmi les six, deux seulement sont connus de la géométrie classique : le triangle rectangle isocèle, et le rectangle de côtés 1 et $\sqrt{2}$. Notons que ce rectangle est celui qui définit les formats de papier A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, etc. et que c'est justement parce que, coupé en deux, il garde la même forme. Contrairement à ce qu'on croit souvent, il semble que le rectangle esthétiquement le plus intéressant n'est pas celui construit sur le nombre d'or, mais celui-là. Les quatre autres jumeaux magiques sont plus découpés, au point même que leurs frontières sont fractales : la frontière de chacun a une longueur infinie et possède une dimension comprise entre 1 (la dimension habituelle d'une courbe) et 2 (la dimension d'un objet ayant une surface non nulle). Ces 4 formes étaient inconnues il y a un siècle et ont été découvertes progressivement depuis 1938. Elles portent des noms de dragon. En voici la liste.

(a) Le dragon de Lévy. Découvert et étudié en 1938 par le mathématicien français Paul Lévy (1886-1971), la dimension de sa frontière fractale est 1,9340071… ce qui signifie que cette frontière est très fortement découpée (1,9340071 est proche de 2). Cet objet est composé de petits morceaux complexes et troués, collés les uns aux autres, mais possède une surface positive (c'est une condition pour être un pavé). Une méthode itérative très simple permet de le construire : elle est indiquée figure 2.



Paul Lévy

(b) Le dragon de Heighway (aussi appelé : la fractale de Jurassic Park, ou dragon de papier plié). La dimension de sa frontière fractale est 1,5236270… On obtient cette figure par un procédé très simple à partir d'un pliage de papier *(voir la figure 3a)*. Elle fut découverte dans les années 1960 par John Heighway un ingénieur de la NASA et a donné lieu a de nombreux travaux depuis.

(c) Les dragons jumeaux (Twindragon). La dimension de la frontière fractale de cette forme est 1,5236270… On la construit en collant l'un contre l'autre deux dragons de Heighway. C'est pourquoi sa frontière a la même dimension fractale que celle du dragon de Heighway.

(d) Les dragons jumeaux ternes (Tame twindragon). La dimension de la frontière de cette forme est 1,2107605… J'ignore quand et par qui cette figure fut découverte. Elle est moins belle que les autres, mais elle fait aussi partie de la famille de six jumeaux magiques et, à ce titre, elle mérite une attention particulière : l'angle formé entre la figure entière et les deux parties parallèles entre elles qui la recomposent est arctan $\sqrt{7}$.

Chacun des jumeaux magiques est une figure qui peut paver le plan tout entier. Cela n'est pas facile à voir quand il s'agit du dragon de Lévy.

Les 6 jumeaux magiques offrent une occasion de réfléchir à la notion de simplicité géométrique : le cercle est certainement simple, de même que le carré ou le triangle équilatéral. Chacun se définit en quelques mots et se rencontre dans la nature et, plus souvent encore, dans les objets conçus par l'homme. Il s'agit des figures s'imposant à l'esprit. Elles sont pour la géométrie l'équivalent des constantes mathématiques fondamentales : π, $\sqrt{2}$, e, etc. Elles sont partout parce qu'elles sont simples au sens mathématique. De même, bien sûr, les solides platoniciens sont mathématiquement simples.

Les jumeaux, des êtres naturels ?

Ce que montre le merveilleux résultat des chercheurs d'Atlanta est que les six jumeaux magiques (fractals ou pas) sont aussi des objets géométriques simples. On peut les définir en quelques mots. Je ne serais pas étonné si comme cela s'est produit pour les pavages de Penrose (dont la symétrie est d'ordre 5) et les quasicristaux, on découvrait que tous les jumeaux magiques (et pas seulement le rectangle des formats de papiers) sont présents dans la nature et que c'est seulement parce que nous étions ignorants de leur existence que nous ne les avons pas encore repérés. Même si des édifices réalisés en utilisant les jumeaux magiques sont délicats à concevoir et à bâtir, ces formes devraient intéresser les architectes et leur permettre de produire des œuvres originales.

Chacun devrait savoir maintenant qu'à côté des cinq solides platoniciens, il y a les six jumeaux magiques. La réalisation de ces figures par des méthodes itératives peut être enseignée dans les collèges et sans doute même dans les écoles primaires. Cela serait, me semble-t-il, une source de renouvellement de la géométrie que les enseignants pourraient exploiter.

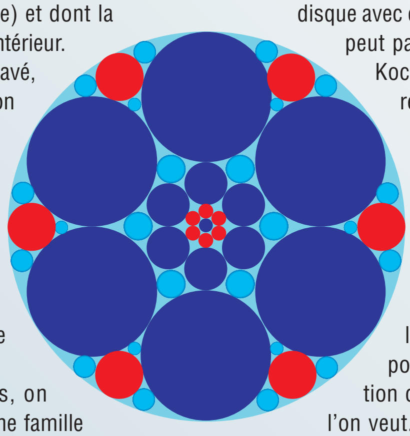
Pour envisager des pavages généraux avec un nombre infini de pavés ou ayant des frontières fractales, nous avons besoin de précision, d'où les définitions suivantes où A désigne un ensemble de points du plan.

– Un point P du plan est dit sur la frontière de A si tout disque de centre P contient à la fois des points de A et des points n'appartenant pas à A.

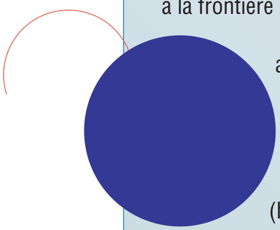
– A est dit fermé si tout point de la frontière de A est dans A.

– L'intérieur de A est l'ensemble A auquel on enlève sa frontière.

– On nomme pavé un ensemble A, fermé, de taille bornée (c'est-à-dire pouvant être placé dans un disque) et dont la frontière est identique à la frontière de son intérieur.



Exemples. Une courbe n'est pas un pavé, car d'intérieur vide. Un disque sur lequel on colle un bout de courbe (comme pour dessiner une cerise, voir figure) n'est pas un pavé, car sa frontière est la réunion du périmètre du disque et du segment de courbe, alors que la frontière de son intérieur est le périmètre du disque. C'est pour éviter ce genre d'ensembles qu'on impose aux pavés d'avoir une frontière égale à la frontière de leur intérieur.



Si A et B sont deux pavés, on appelle pavage de A par B une famille (finie ou non) de pavés ayant deux éléments au moins B_0, B_1, B_2,... telle que :

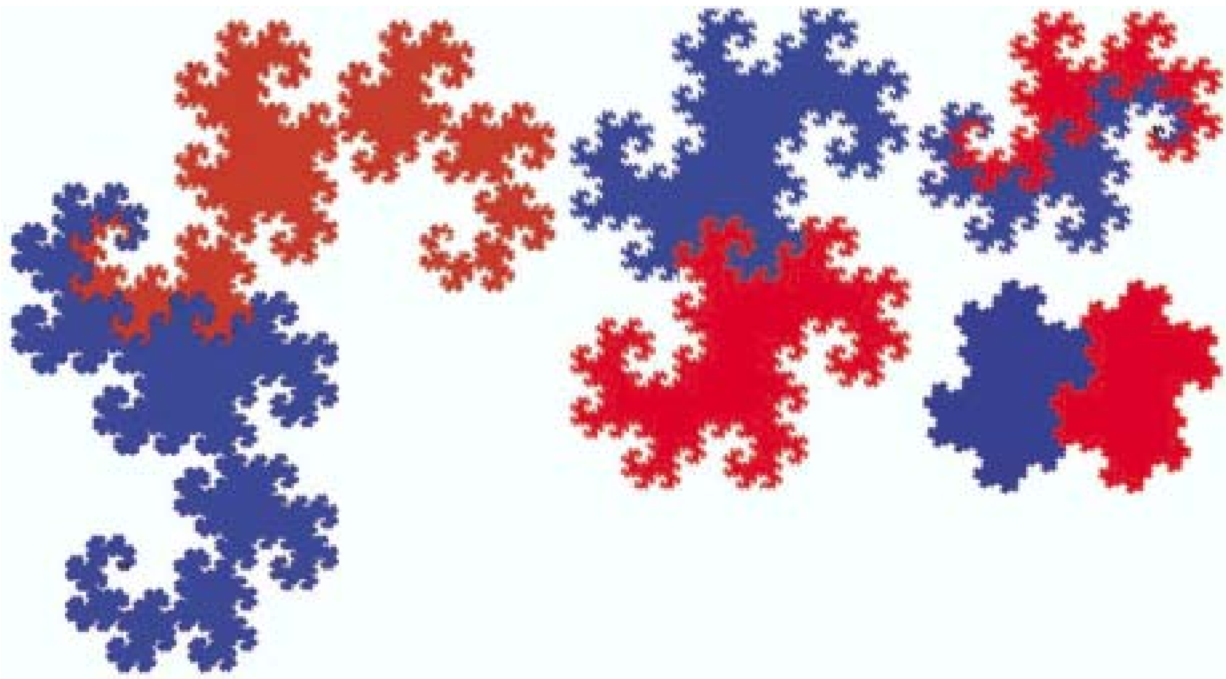
– chaque B_i est semblable à B, c'est-à-dire est obtenu à partir de B par un changement de taille (homothétie), une translation, une rotation ou une composition de ces opérations (parfois on autorisera aussi les symétries, c'est-à-dire les pièces obtenues par retournement de B).

– les B_i recouvrent A, c'est-à-dire : tout point de A est dans l'un des B_i ou sur la frontière de la réunion des B_i ;

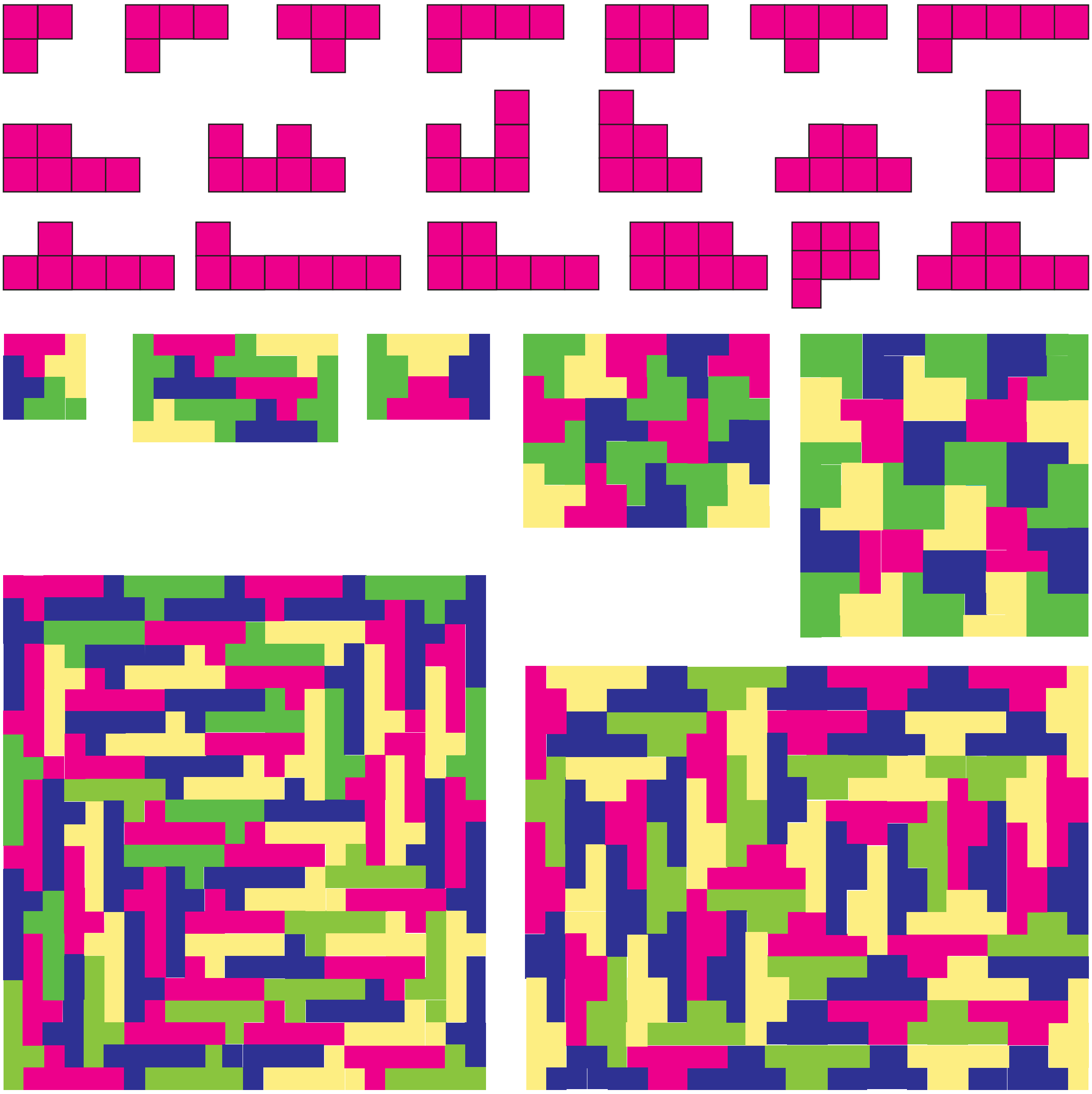
– les B_i ne se chevauchent pas : les points communs à deux B_i différents, s'il y en a, sont situés sur leurs frontières.

Théorème du pavage infini : Si A et B sont deux pavés. Il existe un pavage infini de A par B. En particulier tout pavé A peut être pavé par lui-même, autrement dit tout pavé est un autopavé.

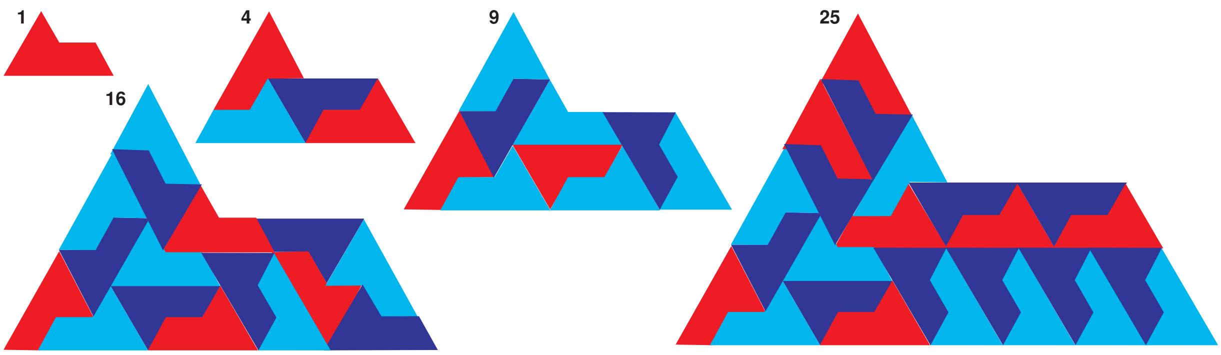
Ce théorème indique par exemple que l'on peut paver un disque avec des disques plus petits, mais aussi qu'on peut paver un disque avec des flocons de von Koch ou l'inverse. Notons que le théorème reste vrai si on impose aux pavés B_i d'être tous orientés de la même façon (pas de rotation). On peut aussi utiliser plusieurs types de pavés différents en imposant que chacun soit utilisé une infinité de fois dans le pavage de A. On peut imposer que les versions réduites de B ne le soient que dans des rapports fixés à l'avance (par exemple 1/2, 1/4, 1/8,...) pourvu que la suite des rapports de réduction contienne des nombres aussi petits que l'on veut. On démontre que pour chaque couple de pavés donné A et B il y a, non pas un pavage de A par B, mais une infinité de pavages de A par B, et que cette infinité est non dénombrable. La démonstration du théorème consiste à placer une par une les formes réduites de B dans A, en s'arrangeant pour ne jamais oublier aucune partie de surface positive contenue dans A.



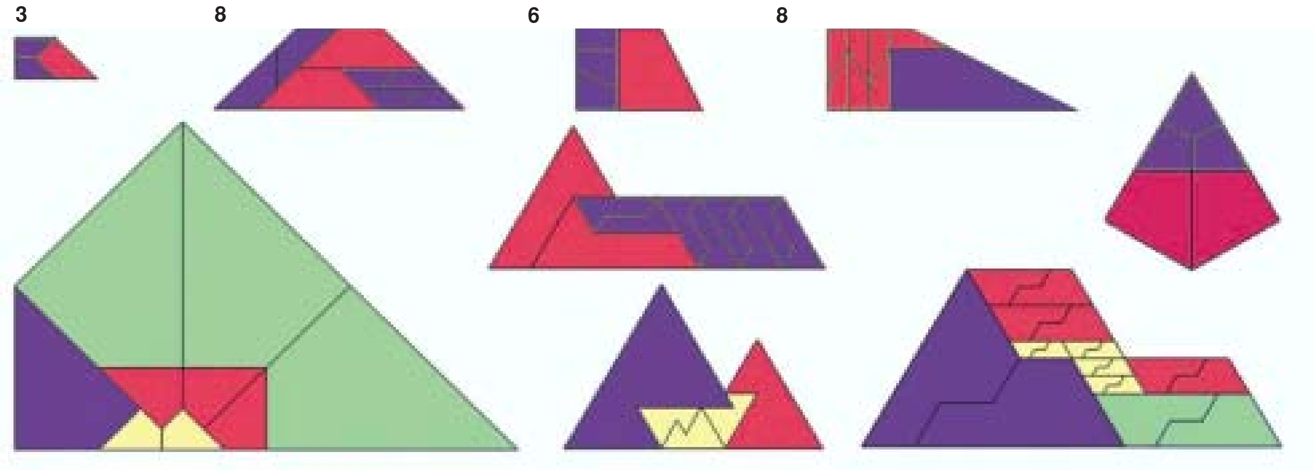
3. Le dragon de Heighway *(a)* et sa construction *(b)* par pliages successifs : ce dragon fait partie des six figures du plan qui sont des 2-autopavés réguliers, c'est-à-dire des formes ayant une surface positive pouvant être découpée en deux parties identiques, chacune étant une version réduite du tout. Parmi ces figures, il y a aussi les dragons jumeaux *(c)*, obtenus en accolant deux dragons de Heighway, figure dont on a indiqué le découpage en deux autopavés *(d)* et les dragons jumeaux ternes *(e)*. Chacune de ces figures pave le plan tout entier.



4. Voici les polyminos les plus simples (comportant 7 carrés ou moins) qui sont des autopavés réguliers. Pour chacun d'eux, on prouve qu'il s'agit d'un autopavé en construisant un rectangle avec des copies du polymino (avec des copies du rectangle, on construit un carré et donc finalement le polymino lui-même). Pour chaque polymino présenté, trouvez le rectangle de taille minimale qu'on peut composer avec des copies de même taille du polymino : nous avons indiqué ici les solutions les plus difficiles.



5. Cette forme, parfois nommée Sphinx, est un 4-autopavé régulier et même un n^2-autopavé régulier pour tout entier n plus grand que 2.



6. De beaux autopavés irréguliers de Scherer. Les formes ci-dessus ne sont pas des autopavés réguliers, mais le mathématicien Karl Scherer montre avec ces figures que ce sont des autopavés irréguliers (on autorise le retournement des pièces).

Les mathématiques comme la physique progressent et fournissent du monde une vision sans cesse renouvelée, nous faisant découvrir de nouvelles formes simples. Nous pensons connaître tout ce qui est simple, pourtant le résultat des chercheurs d'Atlanta montre qu'il s'agit d'une illusion.

Papier et crayon, ou ordinateur

Les autopavés sont innombrables et sauf dans des cas très spéciaux leur énumération et leur classification restent à faire. Un domaine particulier est intensément exploré : celui des polyminos, ces formes géométriques composées de carrés collés les uns aux autres par une arête. Un polymino s'obtient en suivant les lignes d'une feuille quadrillée et c'est pourquoi en étudier les propriétés est plaisant et facile.

Certains polyminos sont des autopavés réguliers, d'autres non. Par exemple le trimino L (trois carrés collés formant un L majuscule) est un 4-autopavé régulier (et même un n^2-autopavé régulier pour tout entier n ; recherchez les dessins qui le prouvent). La connaissance des polyminos autopavés réguliers est aujourd'hui assez avancée quoiqu'on soit loin de répondre à toutes les questions qui se posent.

Un double résultat relie le problème des polyminos autopavés à celui des polyminos pouvant paver un rectangle :
– si des copies d'un polymino permettent de paver un rectangle, alors c'est un autopavé ;
– de plus, si toutes les copies du polymino utilisé ont la même taille (pavage régulier du rectangle) alors le polymino considéré est un autopavé régulier.

La démonstration est facile. À partir du pavage d'un rectangle par le polymino, on obtient d'abord le pavage d'un carré : le rectangle a pour dimensions n et m, deux entiers. Donc en plaçant côte à côte n copies du rectangle et en prenant m lignes de ce type, on obtient un carré de côté nm. En plaçant ensuite des copies de ce carré côte à côte, on reconstitue le polymino qui se trouve donc pavé avec des copies de lui-même.

Si tout polymino qui pave un rectangle est un autopavé, en revanche on ignore si tout polymino qui est un autopavé (régulier ou irrégulier) pave nécessairement un rectangle (par copies identiques ou de tailles différentes de lui-même). On ne connaît pas d'exceptions, mais rien ne prouve qu'il n'y en a pas. N'est-il pas étonnant qu'une question aussi élémentaire soit aujourd'hui irrésolue ? Si vous trouvez un polymino qui est un autopavé, mais qui ne pave aucun rectangle vous ferez avancer ce domaine de recherche.

Récemment Michael Reid *(voir ses pages Internet)* a découvert une série de pavages irréguliers du rectangle par des polyminos intéressants. Ces pavages prouvent que les polyminos utilisés sont des autopavés. Certaines de ces figures sont loin d'être évidentes et peuvent servir de base à la création de puzzles géométriques d'une grande élégance. Dans ces recherches, Michael Reid autorise parfois le retournement des pièces. Lorsque c'est le cas, il prouve donc l'existence d'autopavés irréguliers avec retournement.

Ces figures ont été découvertes par tâtonnement et Michael Reid lance le défi d'écrire un programme d'ordinateur qui lorsqu'on lui demandera de travailler à partir d'un polymino donné explorera systématiquement tous les cas pour conclure avec certitude, soit que le polymino donné n'est pas un autopavé, soit au contraire qu'il en est un et dans ce cas proposera un pavage convenable. La difficulté provient principalement de l'utilisation de copies de tailles différentes du polymino : comment s'y prendre pour être certain qu'on a exploré toutes les possibilités ? De l'astuce et peut-être des résultats mathématiques préliminaires seront nécessaires pour écrire ces programmes.

Passionnés d'énigmes géométriques élémentaires dont l'outil principal est la feuille de papier, algorithmiciens cherchant à relever un défi, amateurs d'images fractales et mathématiciens de haute volée, tous se retrouvent sur le territoire encore largement mystérieux des autopavés.

Auteur & Bibliographie

Jean-Paul Delahaye est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/reptile1.htm Quelques autopavés.
http://www.geocities.com/alclarke0/ Informations sur les polyminos.
Karl Scherer, *A Puzzling Journey to the Reptiles and Related Animals*, Auckland, New Zealand, 1987. http://karl.kiwi.gen.nz/bkrintro.html
Michael Reid, http://hedgehog.math.arizona.edu/ffreid/Polyomino/index.html
Michael Reid, *Tiling with Similar Polyominoes*, in *Journal of Recreational Mathematics*, 31 n°1, 2002-2003, pp. 15-24.
Stewart R. Hinsley. Excellentes pages sur les autopavés fractals : http://www.meden.demon.co.uk/Fractals/reptiles.html