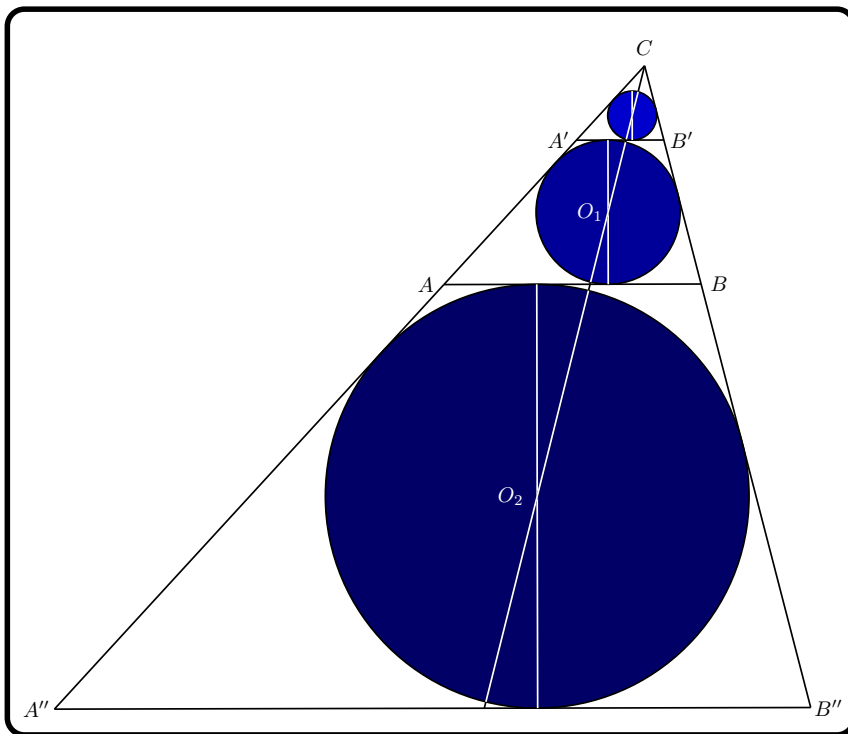




Dans le triangle ABC , on considère le cercle inscrit $\mathcal{C}_1$ de rayon r et de centre O_1 , le cercle exinscrit $\mathcal{C}_2$ tangent à (AB) de centre O_2 et de rayon r_c .

On note h la hauteur issue de C . La parallèle stricte à (AB) tangente au cercle inscrit coupe (CA) et (CB) en A' et B' . La hauteur issue de C dans le triangle $A'B'C$ vaut donc $h - 2r$.

L'homothétie de centre C qui envoie A' sur A a pour rapport $\lambda = \frac{h}{h - 2r}$.

D'autre part elle envoie $\mathcal{C}_1$ sur le cercle tangent aux droites (AB) , (CA) et (CB) , c'est-à-dire $\mathcal{C}_2$.

On en déduit que le rapport de l'homothétie vaut également $\lambda = \frac{r_c}{r}$ et donc que

$$\frac{r_c}{r} = \frac{h}{h - 2r}$$

On note $\hat{A} = 2\alpha$,
 $\hat{B} = 2\beta$, $\hat{C} = 2\gamma$.

$$r_c = O_2B \cos(\beta)$$

$$\frac{O_2B}{O_1B} = \tan(\beta + \gamma)$$

$$r = O_1B \sin(\beta)$$

$$\frac{r_c}{r} = \frac{\tan(\beta + \gamma)}{\tan(\beta)}$$

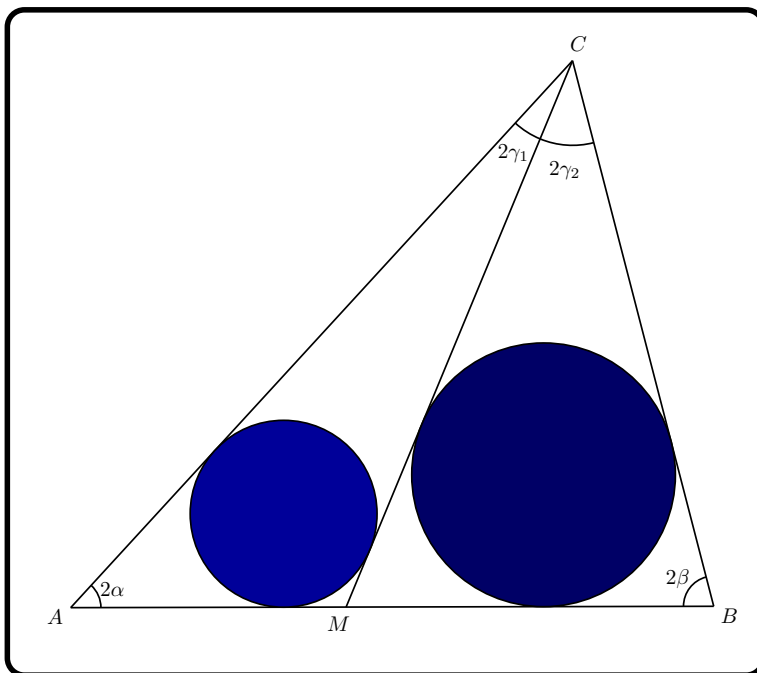
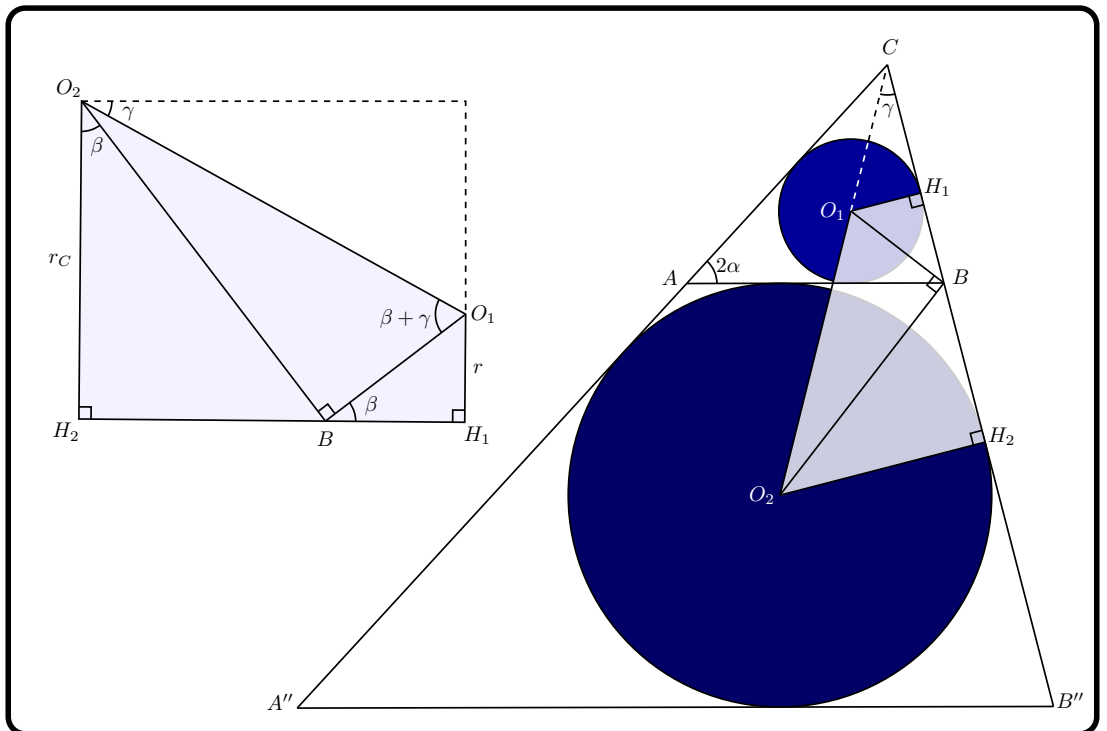
et par symétrie

$$\frac{r_c}{r} = \frac{\tan(\alpha + \gamma)}{\tan(\alpha)}$$

ou encore, puisque

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{r_c}{r} = \frac{1}{\tan(\alpha) \tan(\beta)}$$



Le triangle ABC est découpé en deux triangles CAM et CMB . Les cercles inscrits dans CAM et CMB ont pour rayons respectifs r_1 et r_2 . La hauteur issue de C dans ces deux triangles est toujours h .

D'après ce qui précède, on a

$$\frac{h}{h - 2r_1} = \frac{r_{1c}}{r_1} = \frac{\tan(\alpha + \gamma_1)}{\tan(\alpha)} \quad \text{et}$$

$$\frac{h}{h - 2r_2} = \frac{r_{2c}}{r_2} = \frac{\tan(\beta + \gamma_2)}{\tan(\beta)}$$

$$\text{donc} \quad \frac{h}{h - 2r_1} \times \frac{h}{h - 2r_2} = \frac{\tan(\alpha + \gamma_1)}{\tan(\alpha)} \times \frac{\tan(\beta + \gamma_2)}{\tan(\beta)}$$

$$\text{et puisque } \alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \beta = \frac{\pi}{2},$$

$$\tan(\alpha + \gamma_1) \times \tan(\beta + \gamma_2) = 1 \quad \text{et}$$

$$\frac{h}{h - 2r_1} \times \frac{h}{h - 2r_2} = \frac{1}{\tan(\alpha) \tan(\beta)} = \frac{h}{h - 2r}.$$

On a donc :

$$\frac{h}{h - 2r_1} \times \frac{h}{h - 2r_2} = \frac{h}{h - 2r}$$