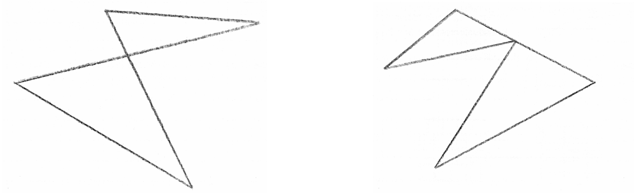
Definitionen:

Unter einer **Parkettierung** (auch Pflasterung oder Parkett genannt) verstehen wir eine überlappungsfreie Überdeckung der Ebene durch Polygone.

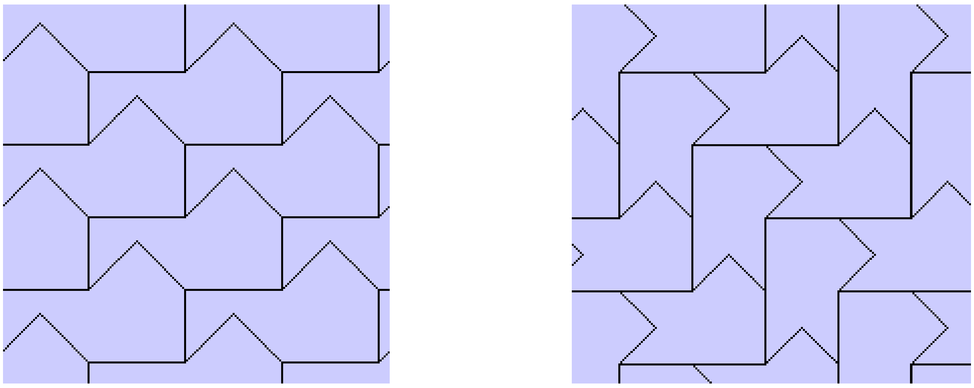
Ein **Polygon** (auch **Vieleck** oder **n-Eck** genannt) erhält man, wenn man mindestens drei voneinander verschiedene Punkte in einer Ebene durch Strecken so miteinander verbindet, dass ein geschlossener Streckenzug entsteht.

(Im Zusammenhang mit Parkettierungen setzen wir auch noch voraus, dass sich der Streckenzug nirgends berührt oder gar überschneidet). Es sind also im Speziellen keine "überschlagenen Vierecke" erlaubt).



Eine Parkettierung heisst **einfach**, wenn alle Polygone kongruent sind.

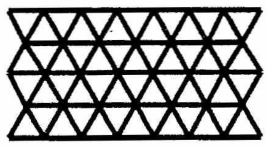
Ein **einfaches** Parkett besteht also aus **einer** Sorte von Pflastersteinen;
Somit sind diese beide Parkette vom mathematischen Standpunkt her **einfach**:



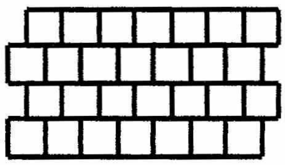
Bei beiden Parketten sind die Figuren kongruent. Der Unterschied besteht allerdings darin, dass die Achtecke im linken Beispiel durch Verschiebung zur Deckung gebracht werden können, im rechten Beispiel jedoch muss ein Teil der Siebenecke umgedreht werden. In der Praxis würde man für den Boden rechts zwei verschiedene Fliesen nehmen müssen, da die Platten eine dekorative Seite und eine zum Kleben haben.

Eine Parkettierung heisst **Platonisch**, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind: 1. Das Parkett besteht aus lauter kongruenten regulären Polygonen 2. Jede Seite eines Polygons ist Seite eines anderen Polygons, d.h. nirgends trifft eine Ecke auf eine Seite

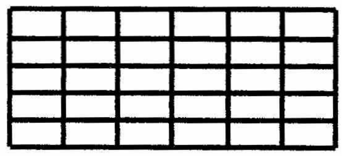
Kleine Übung: Sind diese Parkette **Platonisch** oder nicht?



Platonisch



nicht Platonisch



nicht Platonisch

Wir fragen uns nun: Wie viele Platonische Parkette gibt es?
Gibt es nur eine beschränkte Anzahl oder unendlich viele?

Wir können uns auch fragen:
Mit welchen regulären n-Ecken kann man die Ebene lückenlos überdecken?

Wir halten fest:

- in einer Ecke des Parketts treffen Winkel mit der Summe 360° zusammen
- der Eckwinkel eines regulären Polygons ist immer kleiner als 180°
- bei einem regulären Parkett muss der Eckwinkel des Polygons ein Teiler von 360° sein
- in einer Ecke müssen mindestens 3 reguläre Polygone zusammentreffen.

Füllen Sie mit diesen Erkenntnissen die folgende Tabelle aus:

n-Eck	Eckwinkel	Teiler von 360°?
3	60°	**--ja--**
4	90°	**--ja--**
5	108°	nein
6	120°	**--ja--**
7	ca. 128,6°	nein

Satz:

Es gibt genau 3 Platonische Parkettierungen

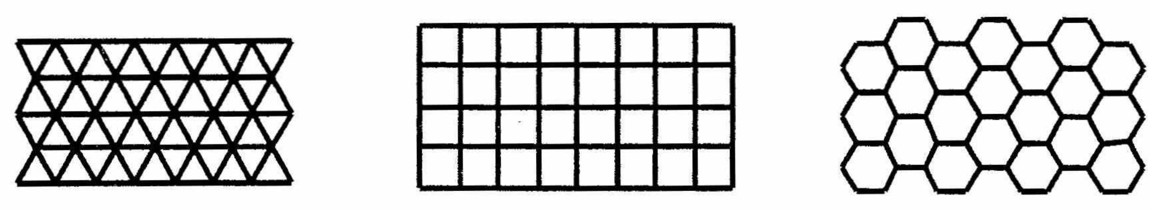
. . . und zwar bestehend aus

a) Gleichseitigen Dreiecken

b Quadraten

c Regulären Sechsecken

Hier eine Darstellung der 3 Platonischen Parkettierungen:

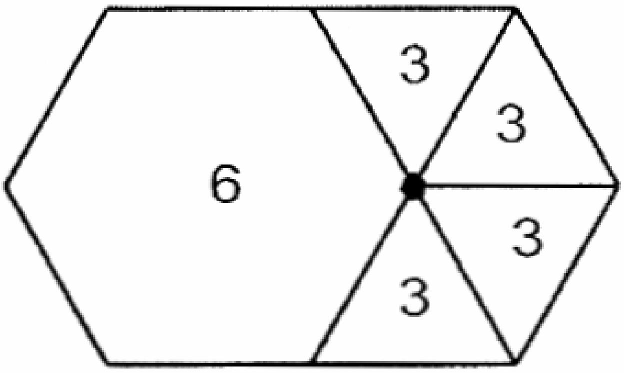


a) b) c)

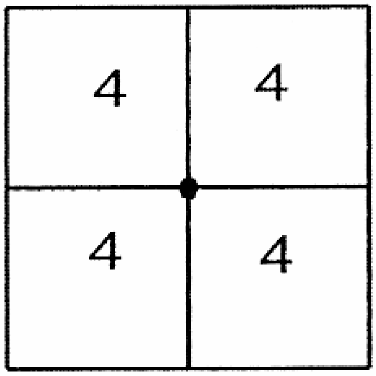
Bisher haben wir Parkette betrachtet, die jeweils nur aus **einem** Typ regulärer n-Ecke bestanden. Jetzt wollen wir Parkettierungen betrachten, die aus mehreren regelmässigen Vielecken bestehen.

In einer Ecke stossen nun verschiedene Polygone zusammen. Wir benötigen eine Bezeichnung der verschiedenen **Ecktypen**:

Unter dem **Typ einer Ecke**, dem **Ecktyp**, versteht man die Abfolge der regulären Polygone in dieser Ecke – zwei Beispiele sollen das illustrieren:

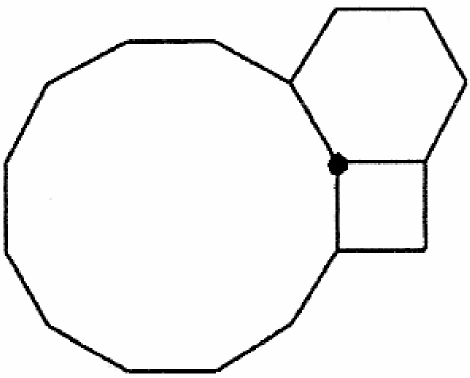


Ecktyp: (3,3,3,3,6)



Ecktyp: (4,4,4,4)

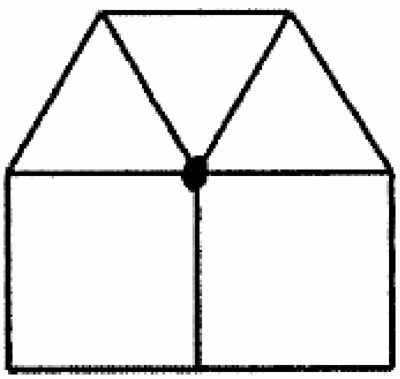
Es hat sich eingebürgert, dass man im Gegenuhrzeigersinn (im mathematisch positiven Sinn) vorgeht und bei den kleinsten Polygonen beginnt; (6,3,3,3,3) oder (3,6,3,3,3) ist nicht falsch, aber nicht üblich; wie Brüche, die kürzt man auch möglichst weitgehend.



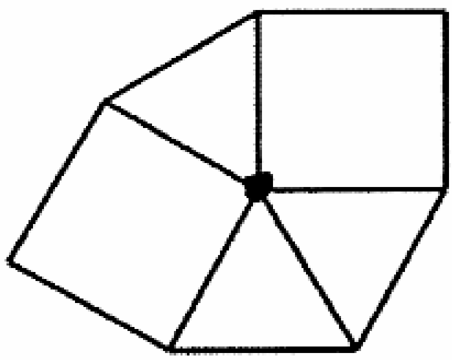
Ecktyp: (4,12,6)
(6,4,12)
(4,6,12)
(6,12,4)
(12,4,6)
(12,6,4)

Alle diese 6 Möglichkeiten beschreiben diesen Ecktypen – welchen würden Sie gemäss Konvention wählen? _______

Stossen in einer Ecke mehr als drei Polygone zusammen, so ist die Reihenfolge wichtig!
Folgende Ecktypen sind **nicht** gleich:



Ecktyp: (3,3,3,4,4)



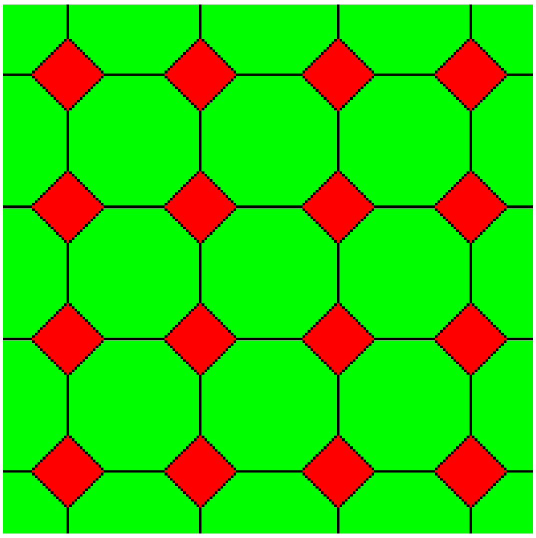
Ecktyp: (3,3,4,3,4)

Mit diesen Definitionen nun können wir **Archimedische Parkette** definieren:

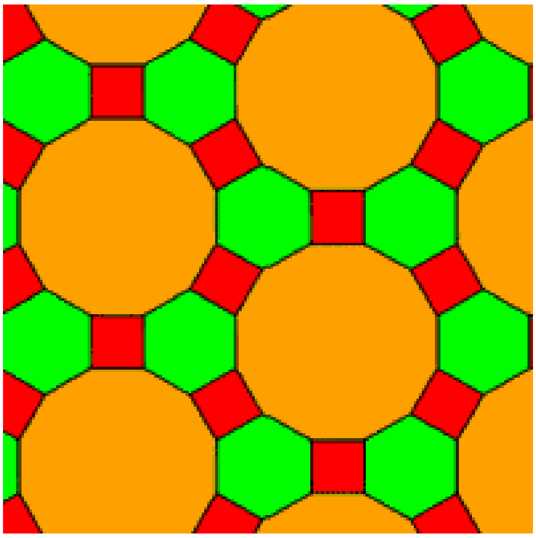
Ein Parkett nennt man **Archimedisch**, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Es enthält mehr als eine Sorte regulärer Polygone
2. Es trifft nie eine Ecke auf eine Seite (insbesondere sind alle Seiten sind gleich lang)
3. Alle Ecken sind vom gleichen Typ

Beispiele:



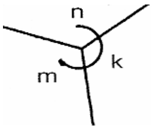
Ecktyp:



Ecktyp:

Wir wenden uns nun der Frage zu:
Wie viele Archimedische Parkette gibt es? Wir unterscheiden 4 Fälle:

1. Fall: (3 reguläre Polygone stossen in einer Ecke zusammen)
Wir betrachten zuerst Archimedische Parkettierungen mit **drei Vielecken pro Ecke** - und zwar einem n-Eck, einem k-Eck und einem m-Eck;

; d.h. wir betrachten einen 

Ecktyp (n,k,m):

Die Winkelsumme in einer Ecke muss 360° betragen. Arbeiten wir mit der Formel für die Innenwinkel, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\underbrace{\frac{(n-2)\cdot 180}{n}}_{\text{Winkel im n-Eck}} + \underbrace{\frac{(k-2)\cdot 180}{k}}_{\text{Winkel im k-Eck}} + \underbrace{\frac{(m-2)\cdot 180}{m}}_{\text{Winkel im m-Eck}} = 360$$

Wir erhalten schlussendlich die Gleichung: $\boxed{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}}$

Wir müssen nun (natürliche) Zahlen n, k und m $\geq$ 3 suchen, die diese Gleichung erfüllen.

Eine kleine Zwischenaufgabe:
Prüfen Sie, ob die weiter vorne gezeigten zwei Beispiele von Archimedischen Parketten diese Gleichungen erfüllen:

1. Ecktyp = (4,8,8)

2. Ecktyp = (4,6,12)

Nun weiter in der Theorie:
Für Archimedische Parkette, bei denen in jeder Ecke 3 reguläre Polygone zusammentreffen, muss gelten:
$\boxed{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}}$ mit natürlichen Zahlen n, k und m $\boxed{\geq}$ 3

Ein **Tripel** ist eine Menge, die aus drei (meistens gleichartigen) Dingen zu einem Ganzen zusammengesetzt ist. **Ein Zahlentripel besteht also aus drei Zahlen**.

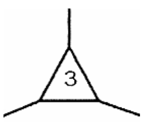
Man kann nun zeigen, dass es genau 10 Zahlentripel gibt, die diese Gleichung erfüllen, und zwar:

-1-	(3,7,42)	-2-	(3,9,18)	-3-	(3,12,12)	-4-	(4,6,12)	-5-	(5,5,10)
-6-	(3,8,24)	-7-	(3,10,15)	-8-	(4,5,20)	-9-	(4,8,8)	-10-	(6,6,6)

Achtung, nicht jedes dieser Zahlentripel beschreibt ein Archimedisches Parkett:

→ Tripel -10- fällt weg, da dieses Tripel ein Platonisches Parkett beschreibt

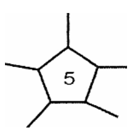
Nehmen wir nun an, wir hätten ein Archimedisches Parkett vom Typ (3,y,z):



Laufen wir um ein Dreieck herum und bezeichnen wir die angrenzenden Polygone mit y und z, so sehen wir nach einem Umlauf, dass y = z sein muss. Es sind also nur die Ecktypen (3,y,y) zulässig.

→ Damit scheiden die Tripel -1-, -2-, -6- und -7- als Parkettierungen aus

Nehmen wir nun an, wir hätten ein Archimedisches Parkett vom Typ (5,y,z):



Wir folgern gleich wie oben, dass eine Parkettierung mit diesem Ecktyp nur für y=z möglich ist. Es sind also nur die Ecktypen (5,y,y) zulässig.

→ Damit scheiden auch die Tripel -5- und -8- als Parkettierungen aus

Damit verbleiben noch die Tripel -3-, -4- und -9-:

-1-	(3,7,42)	-2-	(3,9,18)	-3-	(3,12,12)	-4-	(4,6,12)	-5-	(5,5,10)
-6-	(3,8,24)	-7-	(3,10,15)	-8-	(4,5,20)	-9-	(4,8,8)	-10-	(6,6,6)

Mit diesen Erkenntnissen des ersten Falles formulieren wir folgenden Satz:

Vom Typ (n,k,m) gibt es genau 3 Archimedische Parkettierungen

2. Fall: (4 reguläre Polygone stossen in einer Ecke zusammen)
Wir betrachten nun Archimedische Parkettierungen mit **vier Vielecken pro Ecke** - und zwar einem n-Eck, einem k-Eck, einem m-Eck und einem p-Eck;
Mit den gleichen Umformungen wie im ersten Fall erhalten wir die Gleichung

$\frac{1}{n}+\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=1$ mit natürlichen Zahlen n, k, m und p $\geq$ 3

Ein **Quadrupel** ist eine Menge, die aus vier (meistens gleichartigen) Dingen zu einem Ganzen zusammengesetzt ist. **Ein Zahlenquadrupel besteht also aus vier Zahlen**.

Man kann nun zeigen, dass es genau 7 Zahlenquadrupel gibt, die diese Gleichung erfüllen, und zwar:

-1-	(3,3,4,12)	-2-	(3,4,3,12)	-3-	(3,3,6,6)	-4-	(3,6,3,6)	-5-	(4,4,4,4)
-6-	(3,4,4,6)	-7-	(3,4,6,4)						

Nach analogen Betrachtungen wie im Fall 1 verbleiben noch die Quadrupel -4- und -7-:

-1-	(3,3,4,12)	-2-	(3,4,3,12)	-3-	(3,3,6,6)	-4-	(3,6,3,6)	-5-	(4,4,4,4)
-6-	(3,4,4,6)	-7-	(3,4,6,4)						

Mit diesen Erkenntnissen des zweiten Falles formulieren wir folgenden Satz:

Vom Typ (n,k,m,p) gibt es genau 2 Archimedische Parkettierungen

3. Fall: (5 reguläre Polygone stossen in einer Ecke zusammen)
Man kann nun zeigen, dass es genau 3 Lösungen gibt und alle drei auch zu einer möglichen Parkettierung führen:

-1-	(3,3,3,3,6)	-2-	(3,3,3,4,4)	-3-	(3,3,4,3,4)

Mit diesen Erkenntnissen des dritten Falles formulieren wir folgenden Satz:

Vom Typ (n,k,m,p,q) gibt es genau 3 Archimedische Parkettierungen

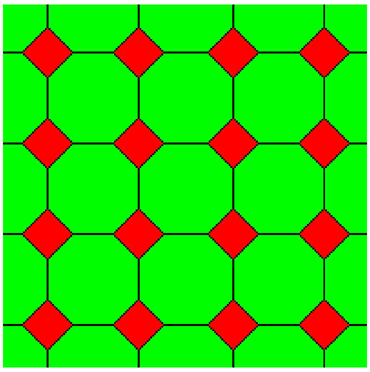
4. Fall: (6 reguläre Polygone stossen in einer Ecke zusammen)
Dieser Fall ist einfach abzuhandeln. Wir wissen, dass man die Ebene mit Dreiecken parkettieren kann – dies geschieht mit 6 gleichseitigen Dreiecken, die in einer Ecke zusammen kommen. Da alle anderen Polygone grössere Innenwinkel haben ist dies der einzig mögliche Fall und dieser Ecktyp (3,3,3,3,3,3) beschreibt eines der Platonischen Parkette.

Wir fassen nun unsere Erkenntnisse über Archimedische Parkette zusammen:

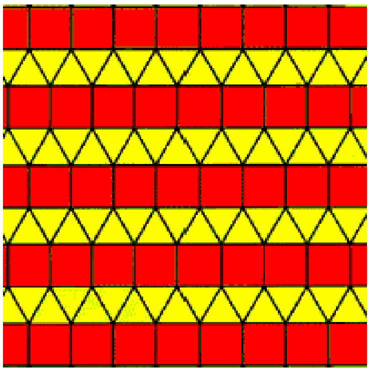
Satz:

Es gibt genau 8 Archimedische Parkettierungen

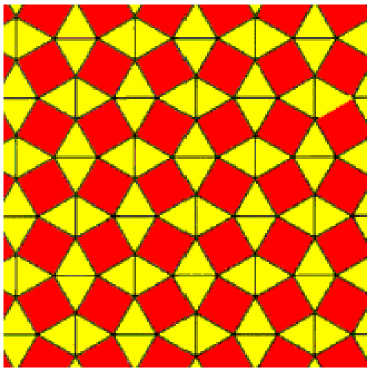
Hier sehen wir sie alle:



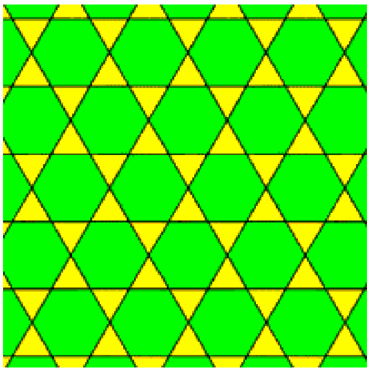
Ecktyp:



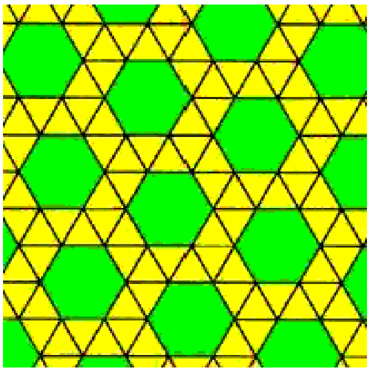
Ecktyp:



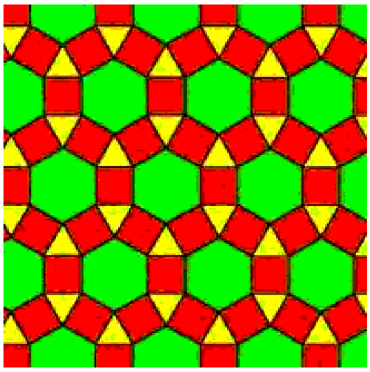
Ecktyp:



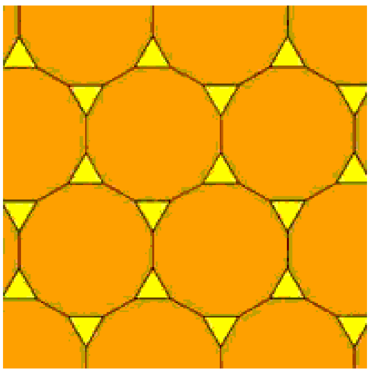
Ecktyp:



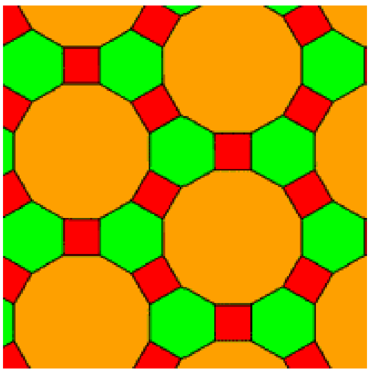
Ecktyp:



Ecktyp:



Ecktyp:

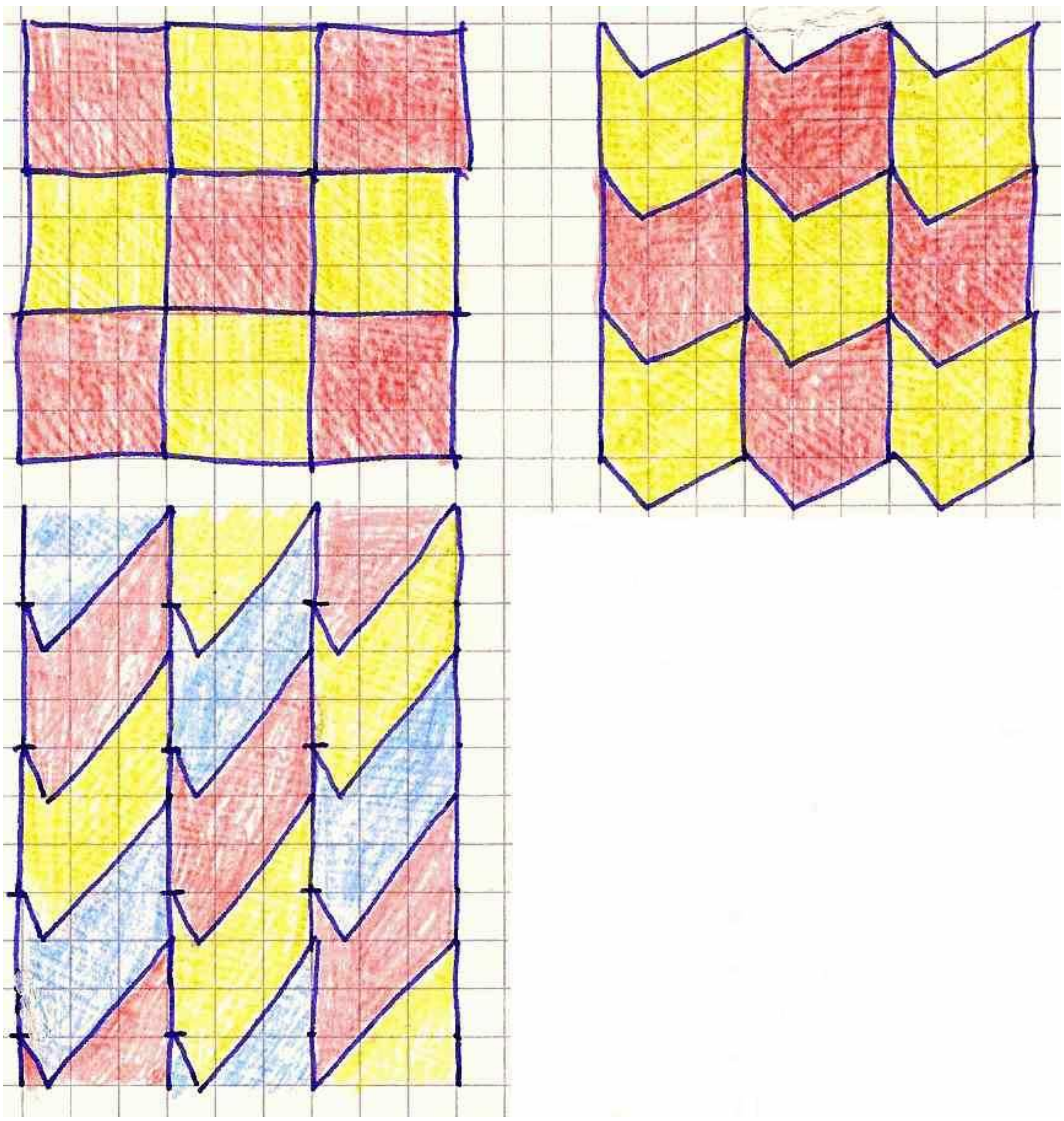


Ecktyp:

Die Parkettierung der Ebene mit n-Ecken: (1)

Wie man einfach aus einer Parkettierung mit einem Viereck eine Parkettierung mit einem (unregelmässigen) Sechseck herstellen kann:

1. ein Viereck bei einer Seite 'ausbuchten' und bei der gegenüber liegenden Seite gleich 'einbuchten'; (damit bleiben die Flächen der Vierecke gleich).
2. Es sind nun kongruente (nicht reguläre) Sechsecke entstanden, die eine lückenlose Parkettierung der Ebene ermöglichen.

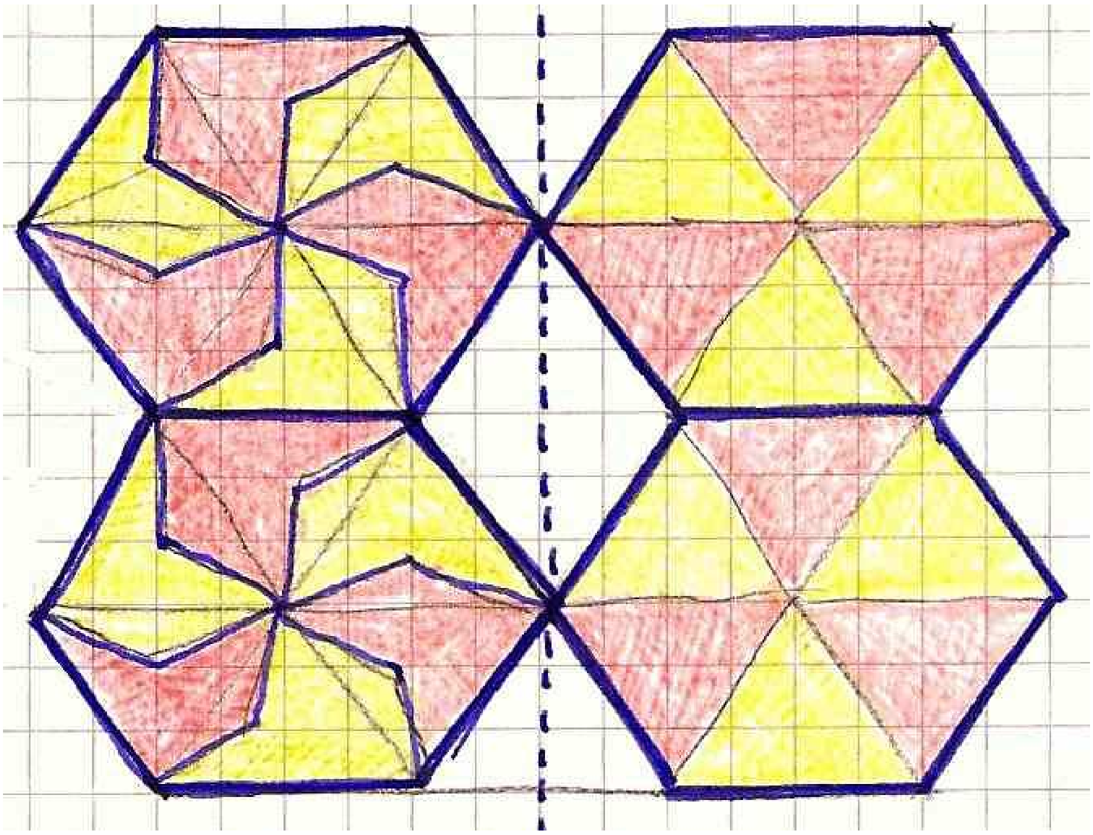


Diesen Prozess kann man nun weiter treiben und bei diesen Sechsecken wieder eine Seite ein- und die entsprechende andere Seite ausbuchten; damit bekommt man eine Parkettierung mit 8-Ecken, 10-Ecken, 12-Ecken, . . .

Die Parkettierung der Ebene mit n-Ecken: (2)

Wie man einfach aus einer Parkettierung mit einem (gleichseitigen) Dreieck eine Parkettierung mit einem (unregelmässigen) Fünfeck herstellen kann:

1. Man nehme 6 gleichseitige Dreiecke und bilde damit ein reguläres Sechseck; damit wird die Ebene lückenlos parkettiert. Jedes dieser gleichseitigen Dreiecke wird nun bei einer Seite 'ausgebuchtet' und bei einer zweiten Seite gleich 'eingebuchtet'; (damit bleiben die Flächen der Dreiecke gleich).
2. Es sind nun kongruente (nicht reguläre) Fünfecke entstanden, die eine lückenlose Parkettierung der Ebene ermöglichen.



Diesen Prozess kann man nun weiter treiben und bei diesen Fünfecken wieder eine Seite ein- und die entsprechende andere Seite ausbuchten; damit bekommt man eine Parkettierung mit 7-Ecken, 9-Ecken, 11-Ecken, ...

Mit diesen Beispielen haben wir konstruktiv den folgenden fundamentalen Satz bewiesen:

Es ist möglich die Ebene mit einem n-Eck zu parkettieren
dies ist für jedes n > 2 möglich

Satz:

Jedes beliebige Viereck parkettiert die Ebene

Wir kennen bereits Beispiele mit speziellen Vierecken:

- mit Quadraten

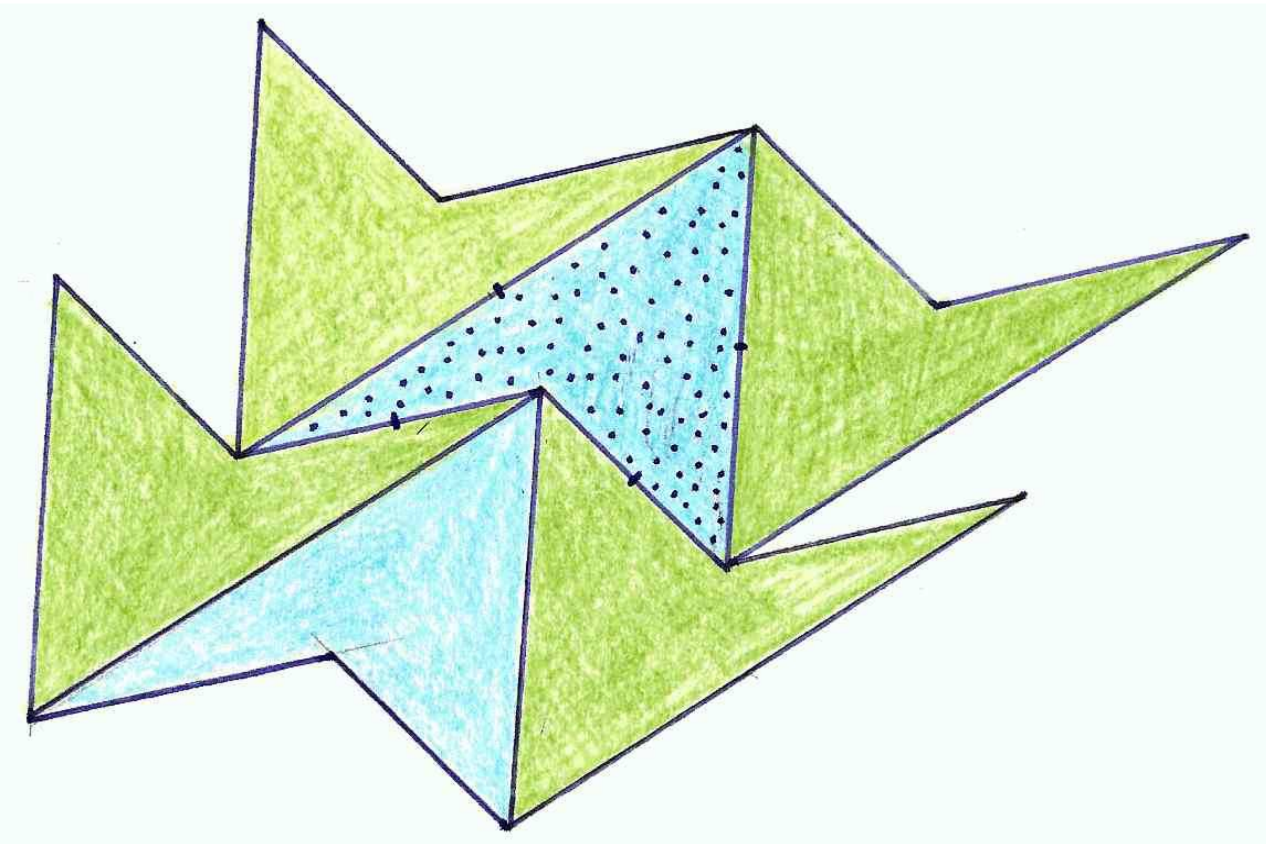
- mit Rechtecken

- mit Parallelogrammen

- mit Trapezen

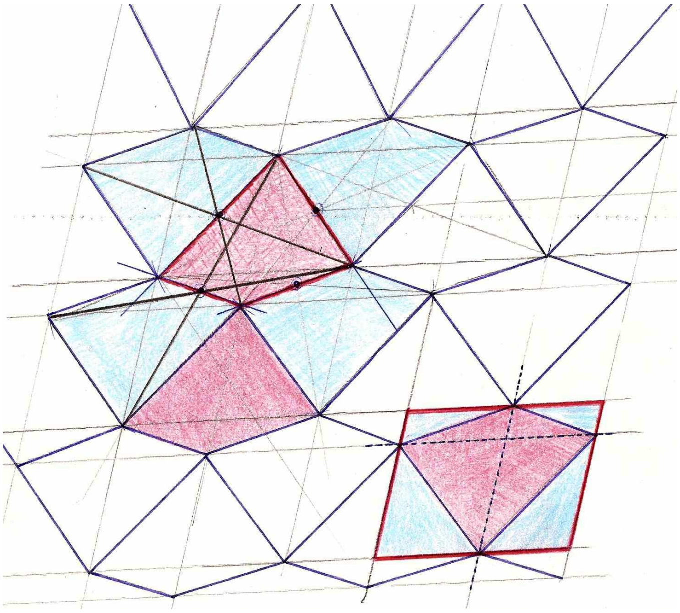
Konstruktiver Beweis mit einem allgemeinen Viereck – hier mit einem nicht konvexen Viereck:

Man führt eine Punktspiegelung an den Seitenmitten des Ausgangsvierecks (blau, gepunktet) durch:



Konstruktiver Beweis mit einem allgemeinen Viereck:

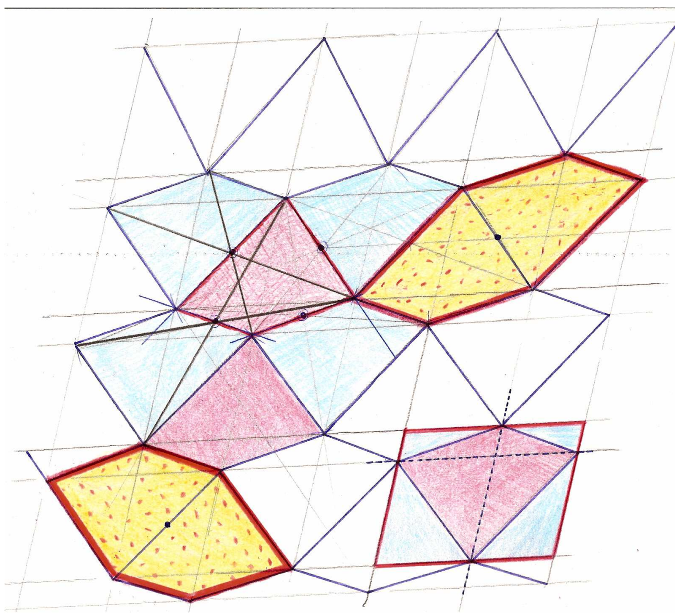
Hier nochmals mit einem konvexen Viereck und eingezeichneten Hilfslinien:
Um das Parkett fort zu setzen kann auch ein Parallelogrammmuster verwendet werden; siehe unten rechts in der Konstruktion.



Mit dieser Konstruktion ist auch der folgende Satz bewiesen:

Jedes punktsymmetrische Sechseck parkettiert die Ebene

Man fasse zwei punktgespiegelte Vierecke zu einem Sechseck zusammen;
es gibt zwei Möglichkeiten:



Hier ein Beispiel eines Parkettes mit einem 18-Eck.

Diese oder ähnliche Parkettsteine werden oft auf öffentlichen Plätzen angetroffen.
Die Verkeilung der Elemente garantiert einen guten Zusammenhalt.